Abstand windschiefer Geraden

Gegeben sind die windschiefen Geraden g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ und h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

Berechne Den Abstand von g und h.

$Bestimmung\ eines\ Normaleneinheitsvektor:$

$\vec{n} \cdot \vec{m}_g = 0,$ $\qquad$ $\vec{n} \cdot \vec{m}_h = 0$

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = 0,$ $\qquad$ $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} x + 2y - 2z = 0 \ \ \boldsymbol{I} \\ -x + 2y + 0y = 0 \ \ \boldsymbol{II} \end{cases}$

$I + II: 4y - 2z = 0$

für $\boldsymbol{y = 1}, 4(1) - 2z = 0$

$4 = 2z \quad | \boldsymbol{: 2}$

$\boldsymbol{z = 2}$

$y\ und\ z\ in\ \boldsymbol{I}\ einsetzen: x + 2(1) - 2(2) = 0 \Rightarrow \boldsymbol{x = 2}$

so, haben wir: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $|\vec{n}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3$

$\Rightarrow \vec{n}_0 = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$

$Abstansberechnung:$

$$d = |(\vec{p} - \vec{q}) \cdot \vec{n}_0| = \left| \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} \right| = 3$$

Der Abstand von g und h ist $\boldsymbol{d = 3}$