Flugbahnen
Die bahnen zweier Flugzeuge kreuzen sich. Das erste Flugzeug bewegt sich von $A\ (0|-50|20)$ nach $B\ (0|50|20)$. Das zweite Flugzeug nimmt den Kurs von Punkt $C\ (-14|46|32)$ auf Punkt $D\ (50|-18|0)$. Wie groß ist der kleinste Abstand der Flugbahnen voneinander?

Die beiden Fluggeradengleichungen:

$$g_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -50 \\ 20 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 100 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad g_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} -14 \\ 46 \\ 32 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 64 \\ -64 \\ -32 \end{pmatrix}.$$

Ansatz für $\vec{n}$: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 100 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$ und $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 64 \\ -64 \\ -32 \end{pmatrix} = 0,$

d.h. $\begin{cases} 0x + 100y + 0z = 0 \\ 64x - 64y - 32z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{y = 0} \\ 64x - 32z = 0 \end{cases}$

für $\boldsymbol{x = 1}, 64(1) - 32z = 0 \qquad$ | **-64**
$-32z = -64 \qquad$ | **:(-32)**
$\boldsymbol{z = 2}$

Normaleneinheitsvektor: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n}_0 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 0 \\ 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}$

Betrag des Normalenvektors:

$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow |\vec{n}| = \sqrt{1^2 + o^2 + 2^2} = \sqrt{5}$

$$d = |(\vec{p} - \vec{q}) \cdot \vec{n}_0| = \left| \left[\begin{pmatrix} 0 \\ -50 \\ 20 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -14 \\ 46 \\ 32 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 0 \\ 2/\sqrt{5} \end{pmatrix} \right| = \frac{10}{\sqrt{5}} \approx 4{,}47.$$

$\Rightarrow \boldsymbol{d = 4,47}$

$A \begin{pmatrix} 0 \\ -50 \\ 20 \end{pmatrix} \qquad B \begin{pmatrix} 0 \\ 50 \\ 20 \end{pmatrix} \qquad C \begin{pmatrix} -14 \\ 46 \\ 32 \end{pmatrix} \qquad D \begin{pmatrix} 50 \\ -18 \\ 0 \end{pmatrix}$