Komplanarität von Vektoren

$\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ sind komplanar, wenn sich einer von ihnen als Linearkombination der anderen darstellen lässt, zB

$$\vec{a} = r\vec{b} + s\vec{c}.$$

Beispiel 1:

Seien drei Vektoren: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}$; $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 10 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 10 = 3r + s \\ 4 = 0r + s \\ -6 = r - 2s \end{array} \right. \Rightarrow \underline{\underline{s = 4}}$$

s in I $\Rightarrow$ $10 = 3r + 4 \quad | -4$
$6 = 3r \quad | :3$
$\underline{\underline{2 = r}}$

s in III $\Rightarrow$ $-6 = r - 2(4)$
$-6 = r - 8 \quad | +8$
$\underline{\underline{2 = r}}$

also, $\begin{pmatrix} 10 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ und es bildet sich die Linearkombination:

$$\vec{a} = 2\vec{b} + 4\vec{c}.$$

Die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ sind komplanar.

Beispiel 2: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{array}{l} \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} r + s = 2 \quad | -s \Rightarrow \underline{r = 2 - s} \\ 7r + 2s = -1 \\ 2r + s = 1 \end{array} \right.$$

r in II einsetzen: $7(2 - s) + 2s = -1$
$14 - 7s + 2s = -1$
$14 - 5s = -1 \quad | -14$
$-5s = -15 \quad | :(-5)$
$\underline{\underline{s = 3}}$

s in r einsetzen: $r = 2 - 3$
$\underline{\underline{r = -1}}$

r und s in die dritte Gleichung einsetzen:

$2(-1) + 3 = 1$ und die III. Gleichung ist erfüllt

Da die Vektoren linear abhängig sind, sind die auch komplanar.