

a)

* Richtung AS:

$$\vec{AS} = S - A = \begin{pmatrix} 45 - 73 \\ 10 + 16 \\ 0 + 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -28 \\ 26 \\ 24 \end{pmatrix}$$

* Länge des Stollens:

$$|\vec{AS}| = d(AS) = \sqrt{(-28)^2 + 26^2 + 24^2} = 45,122 \text{ Meter}$$

$$\begin{pmatrix} 73 \\ -16 \\ -24 \end{pmatrix}$$

* Größe des Winkels zwischen \vec{AS} und \vec{AB} (2 Graden)

$$\cos \alpha = \frac{\vec{AS} \cdot \vec{AB}}{|\vec{AS}| \cdot |\vec{AB}|}$$

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 7 - 73 \\ 17 + 16 \\ -2 + 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -66 \\ 33 \\ 22 \end{pmatrix}$$

$$|\vec{AB}| = \sqrt{(-66)^2 + 33^2 + 22^2} = 77 \text{ Meter}$$

$$\vec{AS} \cdot \vec{AB} = \begin{pmatrix} -28 \\ 26 \\ 24 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -66 \\ 33 \\ 22 \end{pmatrix} = -28 \cdot (-66) + 26 \cdot 33 + 24 \cdot 22 = 3234$$

$$\cos \alpha = \frac{3234}{45,122 \cdot 77} = 0,930$$

$$\Rightarrow \alpha = \cos^{-1}(0,9236) = 21,438^\circ$$

* Koordinaten des Punktes R (an der Oberfläche) $\Rightarrow z_R = 0$

$$\text{also } R = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$$

Richtungsvektor \vec{AB} und \vec{AR} ist die gleiche: $\vec{v}_{AR} = \begin{pmatrix} -66 \\ 33 \\ 22 \end{pmatrix}$ Geradengleichung \vec{AR} :

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 73 \\ -16 \\ -24 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -66 \\ 33 \\ 22 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 73 - 66r \\ y = -16 + 33r \\ 0 = -24 + 22r \end{cases} \Rightarrow r = 1,090$$

 r in x und y einsetzen:

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 73 - 66(1,090) = 1,06 \Rightarrow x \approx 1 \\ y = -16 + 33(1,090) = 19,97 \Rightarrow y \approx 20 \end{cases}$$

$$R \begin{pmatrix} 1 \\ 20 \\ 0 \end{pmatrix}$$

b) Ermitteln von P: $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ y \\ -4 \end{pmatrix}$, Schnittpunkt \overrightarrow{AB} und \overrightarrow{SP}

$$\begin{pmatrix} 45 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ y \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 17 \\ -2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{or} \quad \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} : 11$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 45 + r = 7 - 6s \\ 10 + ry = 17 + 3s \\ 0 - 4r = -2 + 2s \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r + 6s = -38 & \textcircled{1} \\ ry - 3s = -7 & \textcircled{2} \\ -4r - 2s = -2 & \textcircled{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r=4 \\ s=-7 \\ y=\frac{-7}{2} \end{cases}$$

Koordinaten des Vectors $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{7}{2} \\ -4 \end{pmatrix}$

r, s und y wieder einsetzen:

$$45+4=7+6(-7)$$

$$49=49 \rightarrow \text{W.A.}$$

$$10+4\left(-\frac{7}{2}\right)=17+3(-7) \quad \Rightarrow \text{Der gesuchte Punkt } P \begin{pmatrix} 49 \\ -4 \\ -16 \end{pmatrix}$$

$$0-4(4)=-2+2(-7)$$

$$-16=-16 \rightarrow \text{W.A.}$$

c) Bestimmen des Lotfußpunktes K von S auf Geraden AB

Eine Hilfsebene H durch S senkrecht zu g_{AB} lautet

$$H: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 45 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$$

Schnittpunkt H und g_{AB}:

$$\left[\begin{pmatrix} 7 \\ 17 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 45 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} -38-6r \\ 7+3r \\ -2+2r \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{array}{l} 228+36r \\ 21+9r \\ -4+4r \end{array} = 0 \Rightarrow 245+49r=0$$

$$\Rightarrow r=-5$$

$$r \text{ in } \begin{pmatrix} 7 \\ 17 \\ -2 \end{pmatrix} + (-5) \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7+30 \\ 17-15 \\ -2-10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 37 \\ 2 \\ -12 \end{pmatrix}$$

wir bekommen $K \begin{pmatrix} 37 \\ 2 \\ -12 \end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{SK} = \begin{pmatrix} 37-45 \\ 2-10 \\ -12-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -8 \\ -12 \end{pmatrix} \quad \text{Es wird in der Richtung:}$$

$\begin{pmatrix} -8 \\ -8 \\ -12 \end{pmatrix}$ oder $\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$ gegraben!

d) $E_0: \vec{x} = \begin{pmatrix} 73 \\ -16 \\ -24 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -66 \\ 33 \\ 22 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -28 \\ 26 \\ 24 \end{pmatrix}$

also Koordinatenform: $E_0: 220x + 968y - 792z = 19580$

$$E_0: 5x + 22y - 18z = 445$$

Schnittgeraden der beiden Ebenen (Schnittpunkte finden)

$$E_0: 5x + 22y - 18z = 445$$

$E_0 = E$ Lösen ...

$$E: -2y + 3z = -40$$

... Also Schnittgerade: $g: x = \begin{pmatrix} 41 \\ 0 \\ -13,33 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0,66 \end{pmatrix}$

e) Bestimmen des Notausstieges: $|\overrightarrow{AB}| = \begin{pmatrix} -66 \\ 33 \\ 22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OB} - \frac{14}{|\overrightarrow{BA}|} \cdot \overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} 7 \\ 17 \\ -2 \end{pmatrix} - \frac{14}{7} \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7+12 \\ 17-6 \\ -2-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 \\ 11 \\ -6 \end{pmatrix}$$

An der Oberfläche im Punkt $N \begin{pmatrix} 19 \\ 11 \\ -6 \end{pmatrix}$ beginnt die Bohrung.