Lösungen zu Aufgabe 2.2

a) **Berechnung des Innenwinkels**

Durch Einsetzen von $m = -2$ erhält man die Koordinaten:

$A_{-2}(5|-5|-1)$ $\quad B_{-2}(-1|2|-3)$ $\quad C(-1|1|-1)$

Es gilt:

$$\cos\sphericalangle A_{-2}CB_{-2} = \frac{\overrightarrow{CA_{-2}} \circ \overrightarrow{CB_{-2}}}{|\overrightarrow{CA_{-2}}| \cdot |\overrightarrow{CB_{-2}}|} = \frac{\begin{pmatrix}6\\-6\\0\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}}{\sqrt{72}\cdot\sqrt{5}} = \frac{-6}{\sqrt{72}\cdot\sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow \quad \sphericalangle A_{-2}CB_{-2} \approx \underline{\underline{108{,}43°}}$$

Untersuchung der Dreieckseigenschaft

Durch Einsetzen von $m = -3$ erhält man die Koordinaten:

$A_{-3}(5|-8|-1)$ $\quad B_{-3}(-1|2|-5)$ $\quad C(-1|1|-1)$

1. Möglichkeit:

Drei Punkte bilden ein Dreieck, wenn sie nicht auf einer gemeinsamen Geraden liegen.

$$g_{A_{-3}B_{-3}}:\ \vec{x} = \begin{pmatrix}5\\-8\\-1\end{pmatrix} + k\begin{pmatrix}-6\\10\\-4\end{pmatrix}$$

Wenn der Punkt C auf dieser Geraden liegt, müssen seine Koordinaten die Gleichung erfüllen.

$$\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\-8\\-1\end{pmatrix} + k\begin{pmatrix}-6\\10\\-4\end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix}k = 1\\ k = \frac{9}{10}\\ k = 0\end{matrix}$$

Es gibt kein k, das alle drei Gleichungen erfüllt. Der Punkt C liegt daher nicht auf der Geraden $g_{A_{-3}B_{-3}}$. Somit bilden die drei Punkte ein Dreieck.

2. Möglichkeit:

Die drei Punkte bilden ein Dreieck, wenn die Kantenvektoren nicht kollinear sind.

$$\overrightarrow{A_{-3}B_{-3}} = \begin{pmatrix}-6\\10\\-4\end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{B_{-3}C} = \begin{pmatrix}0\\-1\\4\end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{CA_{-3}} = \begin{pmatrix}6\\-9\\0\end{pmatrix}$$

Bedingt durch die verschiedenen Positionen der Zahl 0 sind die Kantenvektoren nicht kollinear zueinander. Die drei Punkte bilden ein Dreieck.

b) **Aufstellen der Gleichung für die Geradenschar f_m**

g_m ist bestimmt durch den Stützpunkt C und den Richtungsvektor $\overrightarrow{CA_m}$.

$$g_m:\ \vec{x} = \begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}6\\3m\\0\end{pmatrix}$$

h_m ist bestimmt durch den Stützpunkt C und den Richtungsvektor $\overrightarrow{CB_m}$.

$$h_m:\ \vec{x} = \begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}0\\1\\2m+2\end{pmatrix}$$

Der Richtungsvektor von f_m muss orthogonal zu den Richtungsvektoren von g_m und h_m sein. Das jeweilige Skalarprodukt muss null sein.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 6 \\ 3m \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad 6x + 3my = 0$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2m+2 \end{pmatrix} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad y + z(2m+2) = 0$$

Es ergibt sich ein unterbestimmtes Gleichungssystem.
Es wird $z = 1$ gewählt.

$$\text{I} \quad 6x + 3my = 0$$

$$\text{II} \quad y + 2m + 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = -2m - 2$$

Eingesetzt in Gleichung I:

$$6x + 3m(-2m - 2) = 0$$

$$6x - 6m^2 - 6m = 0$$

$$x = m^2 + m$$

Der Richtungsvektor von f_m in Abhängigkeit von m lautet:

$$\begin{pmatrix} m^2 + m \\ -2m - 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die Geradengleichung von f_m mit dem Stützpunkt C und orthogonal zu g_m und h_m hat folgende Gleichung:

$$f_m\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} m^2 + m \\ -2m - 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad t \in \mathbb{R}$$

Existenzuntersuchung zur Bedingung I

f_m verläuft parallel zur y-z-Ebene E_{yz}, wenn der Richtungsvektor von f_m orthogonal zum Normalenvektor der Ebene verläuft.

$$\vec{n}_{E_{yz}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Das Skalarprodukt muss null sein.

$$\begin{pmatrix} m^2 + m \\ -2m - 2 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = m^2 + m = 0$$

Durch Ausklammern erhält man ein Produkt.

$$m(m + 1) = 0$$

Ein Produkt ist null, wenn mindestens einer der Faktoren null ist.

$$m = 0 \text{ oder } m = -1$$

Es existieren zwei Geraden aus der Geradenschar f_m, die parallel zur y-z-Ebene sind, für $m = 0$ und $m = -1$.

Existenzuntersuchung zur Bedingung II

f_m verläuft parallel zur z-Achse, wenn der Richtungsvektor von f_m kollinear zum Richtungsvektor der z-Achse, z. B. $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, ist.

$$\begin{pmatrix}m^2+m\\-2m-2\\1\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

Die 3. Zeile ergibt, dass dies nur erfüllt ist für $k=1$.
Es ergeben sich zwei Gleichungen für m:

I $\quad m^2+m=0$

II $\quad -2m-2=0$

Aus der 2. Gleichung folgt $m=-1$.
Die 1. Gleichung ist für $m=-1$ auch erfüllt.
Für $\underline{\underline{m=-1}}$ existiert eine Gerade aus der Geradenschar f_m, die parallel zur z-Achse ist.

c) **Bestimmung der Koordinaten von D**

Durch Einsetzen von $m=1$ erhält man die Koordinaten:

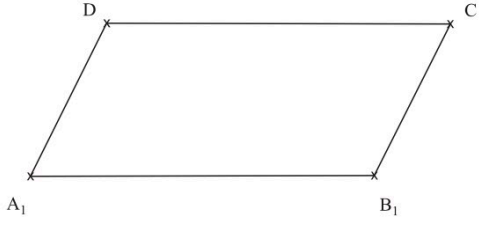
$A_1(5|4|-1)$ $\qquad B_1(-1|2|3)$ $\qquad C(-1|1|-1)$

Es gilt:

$$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{B_1C}$$

$$\overrightarrow{OD}=\begin{pmatrix}5\\4\\-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\-1\\-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\3\\-5\end{pmatrix}$$

Die Koordinaten des Parallelogrammpunktes D lauten $\underline{\underline{D(5|3|-5)}}$.



Berechnung der Höhe des Parallelogramms

Zur Berechnung einer Höhe des Parallelogramms sucht man z. B. die Koordinaten des Fußpunktes des Lotes von C auf die Kante A_1B_1. Gewählt wird eine Hilfsebene H, die senkrecht zu A_1B_1 durch C verläuft. Der Schnittpunkt der Geraden A_1B_1 mit der Hilfsebene H ist der gesuchte Lotfußpunkt.

Für die Normalenform der Ebene H ist der Vektor $\overrightarrow{A_1B_1}$ als Normalenvektor geeignet, C ist der Stützpunkt.

$$H:\ \left(\vec{x}-\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}\right)\circ\begin{pmatrix}-6\\-2\\4\end{pmatrix}=0$$

Das Skalarprodukt ausgerechnet führt zur Gleichung in Koordinatenform:

$H:\ -6x-2y+4z=0$

$H:\ -3x-y+2z=0$

Die Geradengleichung der Geraden A_1B_1 lautet:

$$g_{A_1B_1}:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}5\\4\\-1\end{pmatrix}+\ell\begin{pmatrix}-6\\-2\\4\end{pmatrix}$$

Die Zeilengleichungen der Geradengleichung werden in die Koordinatenform der Ebene H eingesetzt:

$$-3(5-6\ell)-(4-2\ell)+2(-1+4\ell)=0$$
$$-15+18\ell-4+2\ell-2+8\ell=0$$
$$-21+28\ell=0 \quad\Rightarrow\quad \ell=\frac{3}{4}$$

Eingesetzt in die Geradengleichung ergeben sich die Koordinaten des Fußpunktes F des Lotes von C auf $g_{A_1B_1}$:

$F(0{,}5\,|\,2{,}5\,|\,2)$

Die Höhe des Parallelogramms entspricht $|\overrightarrow{CF}|$.

$$\overrightarrow{CF}=\begin{pmatrix}1{,}5\\1{,}5\\3\end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad |\overrightarrow{CF}|=\sqrt{2{,}25+2{,}25+9}=\sqrt{13{,}5}$$

Die zur Grundseite $\overline{A_1B_1}$ gehörende Höhe des Parallelogramms hat die Länge $\underline{\underline{\sqrt{13{,}5}\text{ LE}}}$.

d) Für den Kantenvektor gilt:

$$\overrightarrow{A_mB_m}=\begin{pmatrix}-6\\-3m+1\\2m+2\end{pmatrix}$$

Die Flächenfunktion des Quadrates ist $F(m)=|\overrightarrow{A_mB_m}|^2$:

$$F(m)=36+(1-3m)^2+(2m+2)^2$$
$$=36+1-6m+9m^2+4m^2+8m+4$$
$$=13m^2+2m+41$$

Über Differenzialrechnung ergibt sich die Existenz eines relativen Extremums.

$$F'(x)=26m+2=0 \quad\Rightarrow\quad m=-\frac{1}{13}$$

$$F''(x)=26$$

Die zweite Ableitung ist konstant positiv, so auch für $m=-\frac{1}{13}$. Daher liegt ein relatives Minimum vor.

Für $\underline{\underline{m=-\frac{1}{13}}}$ wird die Fläche des Quadrates minimal.

e) Koordinaten der Endpunkte A_m und B_m für das Intervall

Für $m=-1$ gilt:

$\underline{\underline{A_{-1}(5\,|\,-2\,|\,-1)}}$ $\qquad$ $\underline{\underline{B_{-1}(-1\,|\,2\,|\,-1)}}$

Für $m=\frac{1}{3}$ gilt:

$\underline{\underline{A_{\frac{1}{3}}(5\,|\,2\,|\,-1)}}$ $\qquad$ $\underline{\underline{B_{\frac{1}{3}}\left(-1\,\middle|\,2\,\middle|\,\frac{5}{3}\right)}}$

Kantenvektoren des Quaders; Koordinaten der übrigen Quaderpunkte

$$\overrightarrow{A_{\frac{1}{3}}A_{-1}}=\begin{pmatrix}0\\-4\\0\end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{B_{-1}B_{\frac{1}{3}}}=\begin{pmatrix}0\\0\\\frac{8}{3}\end{pmatrix}$$

Durch Addition der jeweils anderen Kantenvektoren zu den vier Ortsvektoren der Punkte A_{-1}, B_{-1}, $A_{\frac{1}{3}}$, $B_{\frac{1}{3}}$ ergeben sich die Koordinaten der fehlenden Punkte:

Zu A_{-1}: $\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{8}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ \frac{5}{3} \end{pmatrix}$ zu $A_{\frac{1}{3}}$: $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{8}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ \frac{5}{3} \end{pmatrix}$

Zu B_{-1}: $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ zu $B_{\frac{1}{3}}$: $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ \frac{5}{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ \frac{5}{3} \end{pmatrix}$

Es sind die Punkte $\underline{\underline{\left(5 \,\middle|\, -2 \,\middle|\, \frac{5}{3}\right)}}$; $\underline{\underline{\left(5 \,\middle|\, 2 \,\middle|\, \frac{5}{3}\right)}}$; $\underline{\underline{(-1|-2|-1)}}$; $\underline{\underline{\left(-1 \,\middle|\, -2 \,\middle|\, \frac{5}{3}\right)}}$.