n	k \ p	0,05	0,10	$\frac{1}{6}$	0,20	0,25	0,30	$\frac{1}{3}$	0,40	0,45	0,50	k
	0	0059										99
	1	0371	0003									98
	2	1183	0019									97
	3	2578	0078									96
	4	4360	0237	0001								95
	5	6160	0576	0004								94
	6	7660	1172	0013	0001							93
	7	8720	2061	0038	0003							92
	8	9369	3209	0095	0009							91
	9	9718	4513	0231	0023							90
	10	9885	5832	0427	0057	0001						89
	11	9957	7030	0777	0126	0004						88
	12	9985	8018	1297	0253	0010						87
	13	9995	8761	2000	0469	0025	0001					86
	14	9999	9274	2874	0804	0054	0002					85
	15		9601	3877	1285	0111	0004					84
	16		9794	4942	1923	0211	0010	0001				83
	17		9900	5994	2712	0376	0022	0002				82
	18		9954	6965	3621	0630	0045	0005				81
	19		9980	7803	4602	0995	0089	0011				80
	20		9992	8481	5595	1488	0165	0024				79
	21		9997	8998	6540	2114	0288	0048				78
	22		9999	9370	7389	2864	0479	0091	0001			77
	23			9621	8109	3711	0755	0164	0003			76
	24			9783	8686	4617	1136	0281	0006			75
	25			9881	9125	5535	1631	0458	0012			74
	26			9938	9442	6417	2244	0715	0024	0001		73
	27			9969	9658	7224	2964	1066	0046	0002		72
	28			9985	9800	7925	3768	1524	0084	0004		71
	29			9993	9888	8505	4623	2093	0148	0008		70
	30			9997	9939	8962	5491	2766	0248	0015		69
	31			9999	9969	9307	6331	3525	0398	0030	0001	68
	32				9985	9554	7107	4344	0615	0055	0002	67
	33				9993	9723	7793	5188	0913	0098	0004	66
	34				9997	9836	8371	6019	1303	0166	0009	65
	35				9999	9906	8839	6803	1795	0272	0018	64
	36				9999	9948	9201	7511	2386	0429	0033	63
100	37					9973	9470	8123	3068	0651	0060	62
	38					9986	9660	8630	3822	0951	0105	61
	39					9993	9790	9034	4621	1343	0176	60
	40					9997	9875	9341	5433	1831	0284	59
	41					9999	9928	9566	6225	2415	0443	58
	42					9999	9960	9724	6967	3087	0666	57
	43						9979	9831	7635	3828	0967	56
	44						9989	9900	8211	4613	1356	55
	45						9995	9943	8689	5413	1841	54
	46						9997	9969	9070	6196	2421	53
	47						9999	9983	9362	6931	3087	52
	48						9999	9991	9577	7596	3822	51
	49							9996	9729	8173	4602	50
	50							9998	9832	8654	5398	49
	51							9999	9900	9040	6178	48
	52								9942	9338	6914	47
	53								9968	9559	7579	46
	54								9983	9716	8159	45
	55								9991	9824	8644	44
	56								9996	9894	9033	43
	57								9998	9939	9334	42
	58								9999	9966	9557	41
	59									9982	9716	40
	60									9991	9824	39
	61									9995	9895	38
	62									9998	9940	37
	63									9999	9967	36
	64										9982	35
	65										9991	34
	66										9996	33
	67										9998	32
	68										9999	31
n	k	0,95	0,90	$\frac{5}{6}$	0,80	0,75	0,70	$\frac{2}{3}$	0,60	0,55	0,50	k \ p

Anlage zu Aufgabe 3.1

Summierte Binomialverteilungen

Gerundet auf vier Nachkommastellen, weggelassen ist „0“, alle freien Plätze bzw. weggelassenen k-Werte links unten enthalten 1,0000, rechts oben 0,0000. Wenn die Tabelle „von unten“ gelesen wird (p > 0,5), dann ist der richtige Wert 1 – (abgelesener Wert).

Standardnormalverteilung

Gerundet auf vier Nachkommastellen, weggelassen ist „0,“.
Bei negativen Werten liest man nach der Gleichung $\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$ ab.

z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	5000	5040	5080	5120	5160	5199	5239	5279	5319	5359
0,1	5398	5438	5478	5517	5557	5596	5636	5675	5714	5753
0,2	5793	5832	5871	5910	5948	5987	6026	6064	6103	6141
0,3	6179	6217	6255	6293	6331	6368	6406	6443	6480	6517
0,4	6554	6591	6628	6664	6700	6736	6772	6808	6844	6879
0,5	6915	6950	6985	7019	7054	7088	7123	7157	7190	7224
0,6	7257	7291	7324	7357	7389	7422	7454	7486	7517	7549
0,7	7580	7611	7642	7673	7704	7734	7764	7794	7823	7852
0,8	7881	7910	7939	7967	7995	8023	8051	8078	8106	8133
0,9	8159	8186	8212	8238	8264	8289	8315	8340	8365	8389
1,0	8413	8438	8461	8485	8508	8531	8554	8577	8599	8621
1,1	8643	8665	8686	8708	8729	8749	8770	8790	8810	8830
1,2	8849	8869	8888	8907	8925	8944	8962	8980	8997	9015
1,3	9032	9049	9066	9082	9099	9115	9131	9147	9162	9177
1,4	9192	9207	9222	9236	9251	9265	9279	9292	9306	9319
1,5	9332	9345	9357	9370	9382	9394	9406	9418	9429	9441
1,6	9452	9463	9474	9484	9495	9505	9515	9525	9535	9545
1,7	9554	9564	9573	9582	9591	9599	9608	9616	9625	9633
1,8	9641	9649	9656	9664	9671	9678	9686	9693	9699	9706
1,9	9713	9719	9726	9732	9738	9744	9750	9756	9761	9767
2,0	9772	9778	9783	9788	9793	9798	9803	9808	9812	9817
2,1	9821	9826	9830	9834	9838	9842	9846	9850	9854	9857
2,2	9861	9864	9868	9871	9875	9878	9881	9884	9887	9890
2,3	9893	9896	9898	9901	9904	9906	9909	9911	9913	9916
2,4	9918	9920	9922	9925	9927	9929	9931	9932	9934	9936
2,5	9938	9940	9941	9943	9945	9946	9948	9949	9951	9952
2,6	9953	9955	9956	9957	9959	9960	9961	9962	9963	9964
2,7	9965	9966	9967	9968	9969	9970	9971	9972	9973	9974
2,8	9974	9975	9976	9977	9977	9978	9979	9979	9980	9981
2,9	9981	9982	9982	9983	9984	9984	9985	9985	9986	9986
3,0	9987	9987	9987	9988	9988	9989	9989	9989	9990	9990
3,1	9990	9991	9991	9991	9992	9992	9992	9992	9993	9993
3,2	9993	9993	9994	9994	9994	9994	9994	9995	9995	9995
3,3	9995	9995	9995	9996	9996	9996	9996	9996	9996	9997
3,4	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9998
3,5	9998	9998	9998	9998	9998	9998	9998	9998	9998	9998
3,6	9998	9998	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999

Beispiele: $\Phi(2{,}37) = 0{,}9911$; $\Phi(-2{,}37) = 1 - \Phi(2{,}37) = 1 - 0{,}9911 = 0{,}0089$;
$\Phi(z) = 0{,}7910 \Rightarrow z = 0{,}81$; $\Phi(z) = 0{,}2090 = 1 - 0{,}7910 \Rightarrow z = -0{,}81$.

Lösungen zu Aufgabe 3.1

a) Bei den beschriebenen Zufallsexperimenten handelt es sich um Bernoulli-Ketten der Länge $n = 100$.

Ereignis A

1. Möglichkeit:

Das Ereignis „Schüler hat ein Handy" tritt 100-mal (alles Treffer) mit der Wahrscheinlichkeit $p = 0{,}97$ auf, d. h., die Kette ist in allen Positionen mit 1 (für Treffer) besetzt. Nach der Produktregel ist folglich:

$$P(A) = 0{,}97^{100} \approx \underline{\underline{0{,}0476}}$$

2. Möglichkeit:

Zum gleichen Resultat führt auch die Formel der Binomialverteilung. Sei X: „Anzahl der Schüler, die ein Handy haben". X genügt der Binomialverteilung mit den Parametern $p = 0{,}97$ und $n = 100$.

$$P(A) = P(X = 100) = \binom{100}{100} \cdot 0{,}97^{100} \cdot 0{,}03^{0} = 0{,}97^{100} \approx \underline{\underline{0{,}0476}}$$

Zu rund 5 % haben von 100 Schülern alle ein Handy.

Ereignis B

1. Möglichkeit:

Sei Y: „Anzahl der Schüler, die eine Spielekonsole besitzen". Y genügt der Binomialverteilung mit den Parametern $n = 100$ und $p = 0{,}6$. „Mehr als 50 und weniger als 70" bedeutet $50 < Y < 70$. Folglich ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit:

$$P(B) = P(50 < Y < 70) = P(50 < Y \leq 69) = P(Y \leq 69) - P(Y \leq 50)$$

Die Werte für die summierte Binomialverteilung findet man in der beigefügten Tafel, die wegen $p > 0{,}5$ „von unten" zu lesen ist. Das heißt, den Wert für p findet man in der untersten Zeile und den für k in der rechten Spalte. Dabei ist jeweils der abgelesene Wert von 1 zu subtrahieren.

Damit gilt:

$$P(B) = 1 - 0{,}0248 - (1 - 0{,}9729) = \underline{\underline{0{,}9481}}$$

2. Möglichkeit:

Wegen $n \cdot p \cdot (1 - p) = 24 > 9$ ist die Berechnung von P(B) auch mit der globalen Näherungsformel von MOIVRE-LAPLACE möglich. Mit $\mu = n \cdot p = 60$ gilt:

$$\begin{aligned} P(B) &= P(50 < Y < 70) \\ &= P(Y \leq 69) - P(Y \leq 50) \\ &= \Phi\left(\frac{69{,}5 - 60}{\sqrt{24}}\right) - \Phi\left(\frac{50{,}5 - 60}{\sqrt{24}}\right) \\ &\approx \Phi(1{,}94) - \Phi(-1{,}94) \\ &= \Phi(1{,}94) - (1 - \Phi(1{,}94)) \\ &= 2\Phi(1{,}94) - 1 \\ &\approx \underline{\underline{0{,}948}} \end{aligned}$$

Zu rund 95 % haben von 100 Schülern zwischen 50 und 70 Schüler eine Spielekonsole.

b) Die Zufallsgröße $\overline{X}$:= „Anzahl der Schüler, die kein Handy besitzen“ genügt einer Binomialverteilung $B_{n;\,0,03}$ mit noch unbekanntem Stichprobenumfang n. Nach der Aufgabenstellung soll das Ereignis $\overline{X} \geq 1$ mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 0,99 eintreten, also muss n so bestimmt werden, dass die Ungleichung $P(\overline{X} \geq 1) \geq 0{,}99$ gilt.

Wegen

$$P(\overline{X} \geq 1) = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \cdot 0{,}03^k \cdot 0{,}97^{n-k} = 0{,}03^1 \cdot 0{,}97^{n-1} + \ldots + 0{,}03^n$$

lässt sich n aus dieser Darstellung nicht bestimmen. Es muss zur Gegenwahrscheinlichkeit übergegangen werden. Grundsätzlich ist bei $P(X \geq 1)$ der Übergang zur Gegenwahrscheinlichkeit

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - (1-p)^n$$

immer angebracht.

$$P(\overline{X} \geq 1) \geq 0{,}99 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - P(\overline{X} = 0) \geq 0{,}99 \quad \Leftrightarrow \quad P(\overline{X} = 0) \leq 0{,}01$$
$$\Leftrightarrow \quad 0{,}97^n \leq 0{,}01 \quad \Leftrightarrow \quad n \cdot \ln 0{,}97 \leq \ln 0{,}01$$

Die Logarithmusfunktion ist streng monoton wachsend, daher bleibt die Ungleichung in dieser Relation erhalten. Im nächsten Schritt wird durch $\ln 0{,}97 < 0$ dividiert und die Relation kehrt um.

$$n \geq \frac{\ln 0{,}01}{\ln 0{,}97} \approx 151{,}2$$

Um eine Mindestsicherheit von 99 % dafür zu haben, dass wenigstens ein Schüler kein Handy besitzt, sind mindestens <u>152 Schüler</u> zu befragen.

c) Das Problem besteht darin, aus einer Grundgesamtheit von $N = 12$ Elementen, von denen $M = 10$ eine bestimmte Eigenschaft (Computerbesitzer) haben, $n = 4$ ohne Berücksichtigung der Reihenfolge zu entnehmen. Das ist ein Laplace-Experiment und es handelt sich um Kombinationen ohne Wiederholung.
Die Anzahl aller Möglichkeiten ist:

$$\binom{N}{n} = \binom{12}{4} = 495$$

Um das Ereignis D zu realisieren, gibt es zwei Fälle.

1. Fall:
In der Stichprobe sind $k = 3$ Computerbesitzer von $M = 10$.
Man belegt drei Plätze der Stichprobe mit Computerbesitzern. Dazu gibt es

$\binom{M}{k} = \binom{10}{3} = 120$ Möglichkeiten.

Der vierte Platz kann jeweils mit Schülern besetzt werden, die keinen Computer haben, wofür es $\binom{N-M}{n-k} = \binom{2}{1} = 2$ Möglichkeiten gibt.

Also hat dieser Fall insgesamt $\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k} = \binom{10}{3}\binom{2}{1} = 240$ Möglichkeiten.

Sei Z: „Anzahl der Computerbesitzer in der Stichprobe“.

Nach der Wahrscheinlichkeitsdefinition von Laplace gilt:

$$P(Z=k)=\frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

Eine Verteilung dieser Form heißt hypergeometrische Verteilung.

Damit gilt:

$$P(Z=3)=\frac{\binom{10}{3}\binom{2}{1}}{\binom{12}{4}}=\frac{240}{495}$$

2. Fall:

In der Stichprobe sind $k=4$ Computerbesitzer von $M=10$.

Dafür gibt es $\binom{M}{k}=\binom{10}{4}=210$ Möglichkeiten, folglich ist:

$$P(Z=4)=\frac{210}{495}$$

Insgesamt gilt:

$$P(D)=P(Z=3)+P(Z=4)=\frac{450}{495}=\underline{\underline{\frac{10}{11}}}$$

Es liegt in Analogie zu den Teilaufgaben a und b nahe, anzunehmen, dass Z der Binomialverteilung mit $p=\frac{5}{6}$ und $n=4$ genügt. In diesem Fall erhält man:

$$P(D)=P(Z=3)+P(Z=4)=\binom{4}{3}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{5}{6}\right)^4\approx 0{,}868$$

Bei der Binomialverteilung wird angenommen, dass sich das Anteilsverhältnis $p=\frac{M}{N}$ durch die Entnahme einer Stichprobe nicht verändert (Ziehen mit Zurücklegen), während bei der hypergeometrischen Verteilung dies nicht der Fall ist (Ziehen ohne Zurücklegen). Die Binomialverteilung ist eine brauchbare Näherung der hypergeometrischen Verteilung, wenn das Verhältnis $\frac{M}{N}$ sehr klein ist. In diesem Fall liefert die Binomialverteilung eher keine akzeptable Lösung.

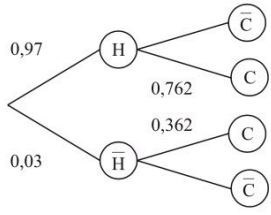
d) Der Sachverhalt lässt sich durch ein zweistufiges Zufallsexperiment beschreiben. Im ersten Schritt wird geprüft, ob das Ereignis H: „Schüler besitzt ein Handy“ eintritt oder nicht. Danach wird festgestellt, ob Ereignis C: „Schüler besitzt einen Computer“ zutrifft. Gegeben sind die Wahrscheinlichkeiten

$$P(H)=0{,}97 \quad P_H(C)=0{,}762 \quad P_{\overline{H}}(C)=0{,}362 \quad P(C)=0{,}75$$

und damit auch die entsprechenden Gegenwahrscheinlichkeiten.

Gesucht ist $P(\overline{H} \cap C)$.
Als Modell eignet sich ein zweistufiges Baumdiagramm.
Nach der ersten Pfadregel gilt:

$$P(\overline{H} \cap C) = P(\overline{H}) \cdot P_{\overline{H}}(C)$$
$$= 0{,}03 \cdot 0{,}362 \approx \underline{\underline{0{,}011}}$$



Der geforderte Nachweis ergibt sich aus den Pfadregeln (Produkt- und Summenregel).

Wegen $C = (H \cap C) \cup (\overline{H} \cap C)$ ist:

$$P(C) = P(H \cap C) + P(\overline{H} \cap C) = P(H) \cdot P_H(C) + P(\overline{H}) \cdot P_{\overline{H}}(C)$$
$$= 0{,}97 \cdot 0{,}762 + 0{,}03 \cdot 0{,}362 = \underline{\underline{0{,}75}}$$

e) Sei Z: „Anzahl der Computerbesitzer“. Z ist binomialverteilt mit den Parametern $n = 1\,260$ und $p = 0{,}75$. Gesucht wird zunächst der Erwartungswert von Z:

$$\mu = E(Z) = n \cdot p = 1\,260 \cdot 0{,}75 = 945$$

Für die zu ermittelnde Wahrscheinlichkeit gilt:

$$P(900 < Z \leq 950) = P(Z \leq 950) - P(Z \leq 900)$$

Wegen $\sigma^2 = n \cdot p \cdot (1-p) = 1\,260 \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}25 \approx 236{,}25 > 9$ ist Z näherungsweise normalverteilt und es kann die globale Näherungsformel von MOIVRE-LAPLACE angewendet werden.

$$P(900 < Z \leq 950) = P(Z \leq 950) - P(Z \leq 900) = \Phi\left(\frac{950{,}5 - 945}{\sqrt{236{,}25}}\right) - \Phi\left(\frac{900{,}5 - 945}{\sqrt{236{,}25}}\right)$$
$$= \Phi(0{,}36) - \Phi(-2{,}9) = \Phi(0{,}36) - (1 - \Phi(2{,}9))$$
$$= \Phi(0{,}36) + \Phi(2{,}9) - 1$$

Aus der Tafel für die Standardnormalverteilung entnimmt man:

$$P(900 < Z \leq 950) = 0{,}6406 + 0{,}9981 - 1 \approx \underline{\underline{0{,}6387}}$$

Zu rund 64 % liegt die Zahl der Computerbesitzer des Gymnasiums zwischen 900 und 950.

f) Wenn der Anteil der Computerbesitzer mindestens 80 % betragen soll, müssen mindestens $1\,260 \cdot 0{,}8 = 1\,008$ Schüler einen Computer haben. Außerhalb der 11. Klassen wären das mindestens $1\,008 - 160 = 848$ Schüler. Jens verliert also die Wette, wenn die Zahl 848 nicht erreicht wird.

Ohne die 11. Klassen gibt es am Gymnasium 1 100 Schüler.
Die Wette geht für Jens verloren, wenn die Zufallsgröße T: = „Anzahl der Computerbesitzer außerhalb der 11. Klassen“ die Bedingung $T < 848$ erfüllt. T ist mit den Parametern $n = 1\,100$ und $p = 0{,}75$ binomialverteilt. Es gilt:

$$\mu = E(T) = n \cdot p = 1\,100 \cdot 0{,}75 = 825,$$
$$\sigma^2 = n \cdot p \cdot (1-p) = 1\,100 \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}25 = 206{,}25 > 9$$

Folglich ist:

$$P(T < 848) = P(T \leq 847) = \Phi\left(\frac{847{,}5 - 825}{\sqrt{206{,}25}}\right) \approx \Phi(1{,}57) = \underline{\underline{0{,}9418}} \quad \text{(Tafelwert)}$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von rund 94 % verliert Jens die Wette.