Lösungen zu Aufgabe 1.2

a) **Definitionsbereich**
Einschränkungen für den Definitionsbereich ergeben sich aus dem Nenner, dieser darf nicht null werden.

$$2x-1=0 \quad \Rightarrow \quad x=\frac{1}{2}$$

$$\underline{\underline{\mathbb{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}}}$$

Verhalten der Funktionswerte von f_a für $x \to \pm\infty$
Für $a>0$ gehört die Funktion zum Typ „Zählergrad > Nennergrad" und strebt für $x \to \infty$ gegen unendlich.
Für $a>0$ gilt:
$\lim\limits_{x\to\infty} f_a(x)=\underline{\underline{+\infty}}$, da Zähler und Nenner positiv sind.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f_a(x)=\underline{\underline{-\infty}}$, da der Zähler positiv, der Nenner aber negativ ist.

Für $a=0$ gehört die Funktion zum Typ „Zählergrad < Nennergrad" und strebt für $x \to \pm\infty$ gegen <u>null</u>.

b) **Wert des Parameters a**
Es muss $f_a'(-1)=0$ gelten.
Die 1. Ableitung wird nach der Quotientenregel gebildet.

$$f_a'(x)=\frac{(2x-1)\cdot 2ax-(ax^2+3)\cdot 2}{(2x-1)^2}=\frac{2ax^2-2ax-6}{(2x-1)^2}$$

$$f_a'(-1)=\frac{2a+2a-6}{9}=\frac{4a-6}{9}=0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{a=1{,}5}}$$

Koordinaten und Art des Extrempunktes
Für $a=1{,}5$ lauten die Funktionsgleichung und ihre Ableitungsfunktion:

$$f_{1,5}(x)=\frac{1{,}5x^2+3}{2x-1}$$

$$f_{1,5}'(x)=\frac{3x^2-3x-6}{(2x-1)^2}$$

1. Möglichkeit:
Die Bedingung für die Existenz von relativen Extrema lautet:
$f'(x)=0$ mit Vorzeichenwechsel an den Nullstellen
Die Nullstellen des Zählers geben die Nullstellen des Quotienten an:

$$3x^2-3x-6=0$$
$$x^2-x-2=0$$
$$x_{1;2}=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+2}=\frac{1}{2}\pm\frac{3}{2}$$
$$x_1=-1; \quad x_2=2$$

Die Zählerfunktion ist eine nach oben geöffnete Parabel, die bei $x=-1$ das Vorzeichen von $+\rightarrow-$ wechselt, bei $x=2$ von $-\rightarrow+$. Der immer positive Nenner ändert diesen Vorzeichenwechsel nicht.
Somit liegt bei $x=-1$ ein relatives Maximum vor, bei $x=2$ ein relatives Minimum.

2. Möglichkeit:
Notwendige und hinreichende Bedingung für Extrema:

$$f'(x)=0 \text{ und } f''(x)\neq 0$$

Für diese Möglichkeit benötigt man die zweite Ableitung. Diese wird nach der Quotienten- und Kettenregel gebildet.

$$\begin{aligned} f''_{1,5}(x) &= \frac{(2x-1)^2\cdot(6x-3)-(3x^2-3x-6)\cdot 2\cdot(2x-1)\cdot 2}{(2x-1)^4} \\ &= \frac{(2x-1)\cdot(6x-3)-4\cdot(3x^2-3x-6)}{(2x-1)^3} \\ &= \frac{12x^2-6x-6x+3-12x^2+12x+24}{(2x-1)^3} \\ &= \frac{27}{(2x-1)^3} \end{aligned}$$

Da $f''_{1,5}(-1)<0$ und $f''_{1,5}(2)>0$, ergeben sich die relativen Extrema wie bei der 1. Möglichkeit.

Durch Einsetzen der x-Werte in die Ausgangsgleichung von $f_{1,5}$ erhält man die zugehörigen y-Koordinaten.

$$f_{1,5}(-1)=\frac{1{,}5+3}{-2-1}=-1{,}5$$

$$f_{1,5}(2)=\frac{1{,}5\cdot 4+3}{4-1}=3$$

Bei $\underline{\underline{(-1\,|\,-1{,}5)}}$ liegt das zugehörige Maximum, bei $\underline{\underline{(2\,|\,3)}}$ das relative Minimum.

c) **Gemeinsamer Schnittpunkt auf der y-Achse**
Für Schnittpunkte mit der y-Achse gilt $x=0$.

$$f_a(0)=\frac{3}{-1}=-3$$

Der Schnittpunkt mit der y-Achse hat die Koordinaten $\underline{\underline{(0\,|\,-3)}}$. Da er unabhängig von a ist, schneiden alle Graphen G_a die y-Achse in diesem Punkt.

Tangente
$f'_a(0)$ gibt die Steigungszahl der Tangente in diesem Punkt an.

$$f'_a(x)=\frac{2ax^2-2ax-6}{(2x-1)^2}$$

$$f'_a(0)=\frac{-6}{1}=-6$$

Da die Steigungszahl unabhängig von a ist, gilt sie für alle Graphen G_a in diesem Punkt.

Die Tangentengleichung als Geradengleichung ist vom Typ $t(x) = mx + b$.

Der y-Achsenabschnitt $b = -3$ lässt sich direkt aus dem Schnittpunkt mit der y-Achse ablesen. Für die Steigung gilt:

$$m = f_a'(0) = -6$$

Die Gleichung der gemeinsamen Tangente aller Graphen G_a im gemeinsamen Schnittpunkt mit der y-Achse lautet:

$$\underline{\underline{t(x) = -6x - 3}}$$

d) Zerlegen des Funktionsterms in die Summe eines ganzrationalen Terms und eines Bruchterms durch Polynomdivision liefert:

$$(x^2 + 3) : (2x - 1) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} + \frac{13}{4 \cdot (2x - 1)}$$

Die Integration des Bruchterms führt zu einem ln-Term mittels Substitutionsmethode.

$$\int \frac{13}{8x - 4} dx = \int 13 \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8x - 4} \cdot 8\,dx \qquad \text{Substitution: } z = 8x - 4 \quad dz = 8\,dx$$

$$\int \frac{13}{8x - 4} dx = \int \frac{13}{8} \cdot \frac{1}{z} dz = \frac{13}{8} \cdot \ln|z| + c = \frac{13}{8} \cdot \ln|8x - 4| + c$$

Das bestimmte Integral der Funktion f_1 in den angegebenen Grenzen ist negativ, da die Fläche im gesamten Bereich unterhalb der x-Achse liegt.

$$\int_{-8}^{-0,5} \frac{x^2 + 3}{2x - 1} dx = \int_{-8}^{-0,5} \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4} + \frac{13}{8x - 4} \right) dx = \left[\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}x + \frac{13}{8} \cdot \ln|8x - 4| \right]_{-8}^{-0,5}$$

$$= \frac{1}{16} - \frac{1}{8} + \frac{13}{8} \cdot \ln|-8| - \left(16 - 2 + \frac{13}{8} \cdot \ln|-68| \right)$$

$$= -\frac{1}{16} + \frac{13}{8} \cdot \ln|-8| - 14 - \frac{13}{8} \cdot \ln|-68|$$

$$= -\frac{225}{16} + \frac{13}{8} \cdot (\ln 8 - \ln 68) \approx -17{,}54$$

Die Fläche hat eine Flächengröße von ungefähr $\underline{\underline{17{,}54 \text{ Flächeneinheiten}}}$.

e) **Mittlerer Anstieg**

Der mittlere Anstieg ist die Sekantensteigung der Geraden durch die Begrenzungspunkte des Intervalls für G_1:

$$f_1(x) = \frac{x^2 + 3}{2x - 1}$$

$$m_{\text{Sekante}} = \frac{f_1(-8) - f_1(-4)}{-8 - (-4)} = \frac{-\frac{67}{17} - \left(-\frac{19}{9}\right)}{-4} = \underline{\underline{\frac{70}{153}}}$$

Differenz von mittlerem und maximalem Anstieg
Der lokale Anstieg m(x) von G_1 wird angegeben durch das Steigungsverhalten von f_1, also durch die erste Ableitung von f_1.

$$m(x) = f_1'(x) = \frac{2x^2 - 2x - 6}{(2x-1)^2} \qquad (a = 1 \text{ eingesetzt in } f_a' \text{ in Teilaufgabe b)}$$

Der maximale Anstieg ist das Maximum von m(x), also von f_1'. Daher muss $m'(x) = f_1''(x)$ untersucht werden.

Die Ableitung erfolgt nach der Quotienten- und Kettenregel.

$$m'(x) = f_1''(x) = \frac{(2x-1)^2 \cdot (4x-2) - (2x^2 - 2x - 6) \cdot 2 \cdot (2x-1) \cdot 2}{(2x-1)^4}$$

$$= \frac{(2x-1) \cdot (4x-2) - 4 \cdot (2x^2 - 2x - 6)}{(2x-1)^3}$$

$$= \frac{8x^2 - 4x - 4x + 2 - 8x^2 + 8x + 24}{(2x-1)^3}$$

$$= \frac{26}{(2x-1)^3}$$

Da der Zähler nicht null werden kann, gibt es keine Nullstelle der ersten Ableitung von m und somit kein relatives Extremum.
Die Steigung von m ist im Intervall $-8 \le x \le -4$ immer negativ. Die Funktion m ist also in diesem Intervall monoton fallend. Das gesuchte Maximum von m ist das Randmaximum an der Stelle $x = -8$.

$$m_{max} = f_1'(-8) = \frac{128 + 16 - 6}{(-17)^2} = \frac{138}{289}$$

Der Unterschied von $m_{Sekante}$ und m_{max} beträgt:

$$m_{max} - m_{Sekante} = \frac{138}{289} - \frac{70}{153} = \frac{52}{2\,601} = \underline{\underline{0{,}019992 < 0{,}02}}$$

Der mittlere Anstieg und der maximale Anstieg von G_1 unterscheiden sich in dem Intervall $-8 \le x \le -4$ um weniger als 0,02.