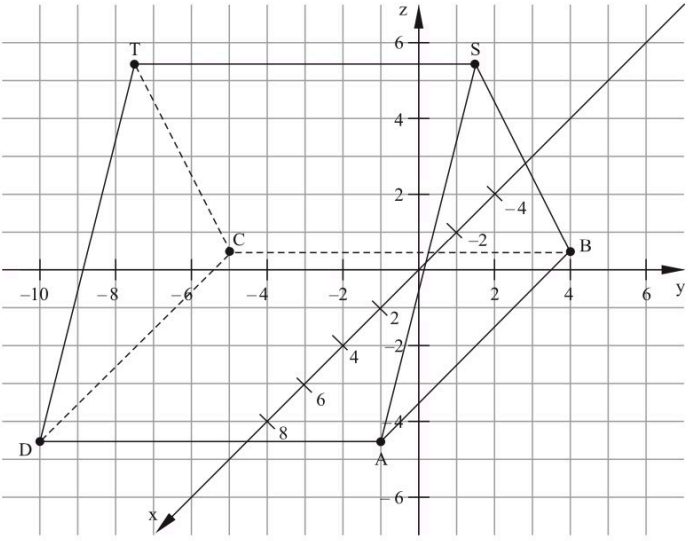
Lösungen zu Aufgabe 2.1

a) **Punktprobe**
Einsetzen der Koordinaten von C bzw. D in die Koordinatengleichung von E liefert:

$$-5+10\cdot 0{,}5=0$$

Die Gleichung ist erfüllt und somit sind C und D Elemente der Ebene E. Das heißt, C und D liegen direkt auf dem Hang.

Zeichnung
Die hier verwendeten Zeichnungen sind maßstäblich verkleinert. Das in der Prüfung gegebene Anlagenblatt hat das Format DIN-A4.



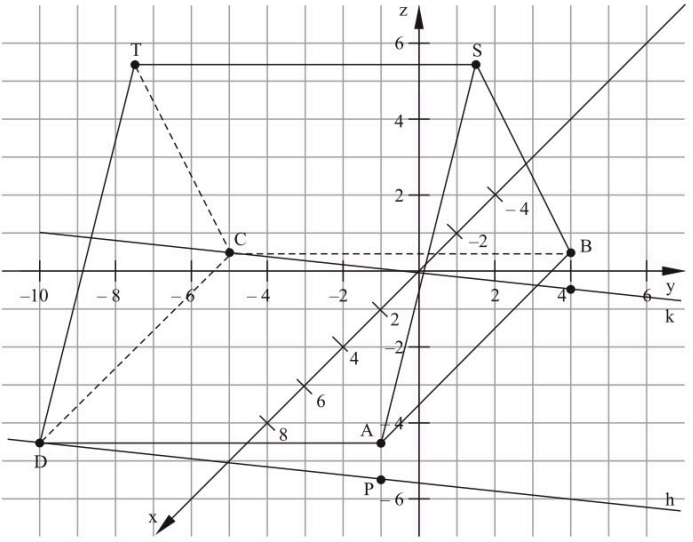
b) Die Geraden h und k haben wegen Parallelität die Gleichungen:

$$\vec{x}=\overrightarrow{OD}+\lambda\cdot\overrightarrow{DP} \text{ bzw. } \vec{x}=\overrightarrow{OC}+\mu\cdot\overrightarrow{DP};\ \lambda,\mu\in\mathbb{R}$$

Einsetzen der Koordinaten liefert:

$$\underline{\underline{h:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}10\\-5\\0{,}5\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}0\\9\\-0{,}9\end{pmatrix};\ \lambda\in\mathbb{R}}}$$

$$\underline{\underline{k:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}0\\-5\\0{,}5\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}0\\9\\-0{,}9\end{pmatrix};\ \mu\in\mathbb{R}}}$$



c) Die Ebene, in der die Bodenplatte liegt, ist parallel zur x-y-Ebene und hat, aus den Koordinaten der vier Eckpunkte ersichtlich, die Gleichung B: $z = 0{,}5$. Die Ebene, die parallel zur Bodenplatte und 2,5 LE darüber liegt, hat folglich die Gleichung D: $z = 3$.

Die Eckpunkte S_1, S_2, S_3, S_4 der Deckenfläche ergeben sich als Durchstoßpunkte der Dachkanten $\overline{AS}$, $\overline{BS}$, $\overline{CT}$, $\overline{DT}$ durch die Ebene D. Es gilt:

$$g_{AS}:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \\ 0{,}5 \end{pmatrix} + \alpha \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 7{,}5 \end{pmatrix};\ \alpha \in \mathbb{R}$$

Eingesetzt in D folgt:

$$0{,}5 + 7{,}5 \cdot \alpha = 3 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{1}{3}$$

Mit diesem Parameter erhält man aus g_{AS} den Eckpunkt:

$$\underline{\underline{S_1\left(\frac{25}{3} \,\middle|\, 4 \,\middle|\, 3\right)}}$$

Die weiteren Eckpunkte kann man entsprechend berechnen.
Für S_2 gilt:

$$g_{BS}:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0{,}5 \end{pmatrix} + \alpha \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 7{,}5 \end{pmatrix};\ \beta \in \mathbb{R}$$

$$0{,}5 + 7{,}5 \cdot \beta = 3 \quad \Rightarrow \quad \beta = \frac{1}{3}$$

$$\underline{\underline{S_2\left(\frac{5}{3} \,\middle|\, 4 \,\middle|\, 3\right)}}$$

Für S_3 gilt:

$$g_{CT}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 0{,}5 \end{pmatrix} + \gamma \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 7{,}5 \end{pmatrix}; \ \gamma \in \mathbb{R}$$

$$0{,}5 + 7{,}5 \cdot \gamma = 3 \ \Rightarrow \ \gamma = \frac{1}{3}$$

$$\underline{\underline{S_3\left(\frac{5}{3} \,\middle|\, -5 \,\middle|\, 3\right)}}$$

Für S_4 gilt:

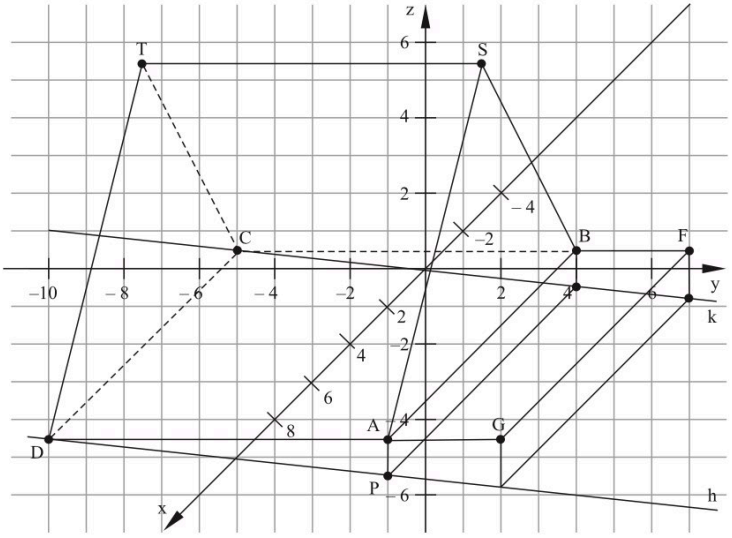
$$g_{DT}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ -5 \\ 0{,}5 \end{pmatrix} + \delta \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 7{,}5 \end{pmatrix}; \ \delta \in \mathbb{R}$$

$$0{,}5 + 7{,}5 \cdot \delta = 3 \ \Rightarrow \ \delta = \frac{1}{3}$$

$$\underline{\underline{S_4\left(\frac{25}{3} \,\middle|\, -5 \,\middle|\, 3\right)}}$$

Die Punkte ergeben sich aber auch unter Verwendung der Koordinaten von S_1 und derjenigen von B, C und D durch die Symmetrie des Hauses.

d) Der mit Sand aufzufüllende Terrassenkörper ist ein gerades Prisma mit einem Trapez als Grund- und Deckfläche.



Die beiden Grundseiten des Trapezes sind die Höhen der Punkte A und G (bzw. B und F) über der Hangebene E.

Die Höhe von A über E ist der Betrag der Strecke $\overline{AP}$:

$$|\overline{AP}| = 0{,}4 + 0{,}5 = 0{,}9$$

Bezeichnet man die senkrechte Projektion von G in E mit G_E, so gilt $G_E(10|7|g)$ und eingesetzt in die Koordinatengleichung von E ergibt sich:

$$7 + 10 \cdot g = 0 \quad \Rightarrow \quad g = -0{,}7$$

Die Höhe von G über E ist also der Betrag der Strecke $\overline{GG_E}$:

$$|\overline{GG_E}| = 0{,}7 + 0{,}5 = 1{,}2$$

Für die Höhe des Trapezes gilt $|\overline{AG}| = 3$ und für die Höhe des Prismas $|\overline{AB}| = 10$.
Unter Berücksichtigung von 1 LE = 1 m berechnet man nun das Volumen V des Prismas:

$$V = \frac{1}{2} \cdot \left(|\overline{AP}| + |\overline{GG_E}| \right) \cdot |\overline{AG}| \cdot |\overline{AB}|$$

$$= \frac{1}{2} \cdot (0{,}9 + 1{,}2) \cdot 3 \cdot 10 = \underline{\underline{31{,}5\,[m^3]}}$$

Für den Terrassenbau werden 31,5 Kubikmeter Sand zum Auffüllen benötigt.

e) **Koordinaten des Schattenpunktes**
Die Gerade g_t, die den Sonnenstrahl durch den Punkt S enthält, hat die Gleichung:

$$g_t : \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} -5t \\ (1+t) \cdot 1{,}5 \\ -7{,}5 \end{pmatrix}; \ \beta \in \mathbb{R}$$

Im Zusammenhang mit der Ebene B: $z = 0{,}5$, in der sowohl die Bodenplatte als auch die Terrassenebene liegt, ergibt sich:

$$8 - 7{,}5 \cdot \beta = 0{,}5 \quad \Rightarrow \quad \beta = 1$$

Damit hat der von t abhängige Schattenpunkt die Koordinaten $\underline{\underline{S_t'(5 - 5t \,|\, 5{,}5 + 1{,}5t \,|\, 0{,}5)}}$.

Bewegung des Schattenpunktes
Da der Zeitparameter t durch das Intervall $0 \le t \le 1$ eingeschränkt ist, erhält man als Anfangspunkt der Bewegungslinie $\underline{\underline{S_0'(5|5{,}5|0{,}5) = M}}$, wobei M der Mittelpunkt der Terrassenfläche ist. Für den Endpunkt der Bewegungslinie erhält man $\underline{\underline{S_1'(0|7|0{,}5) = F}}$, wobei F Eckpunkt der Terrassenfläche ist.

Aus $x = 5 - 5t \quad \Rightarrow \quad t = 1 - \frac{x}{5}$ folgt eingesetzt in $y = 5{,}5 + 1{,}5t$ die lineare Funktion:

$$y = -\frac{3}{10}x + 7; \ 0 \le x \le 5$$

Der Schattenpunkt bewegt sich in einer Stunde linear auf der Diagonalen $\overline{AF}$ der Terrassenfläche von M nach F.