Lösungen zu Aufgabe 1.1

a) **Nullstelle von f_a**

Die Nullstelle von f_a ist die Lösung der Gleichung $f_a(x)=0$.

$$f_a(x)=0 \;\Rightarrow\; (x+a)\cdot e^{a-x}=0 \;\Rightarrow\; x+a=0 \;\Rightarrow\; \underline{\underline{x=-a}}$$

Koordinaten und Art des Extrempunktes

Zur Ermittlung des Extrempunktes des Graphen G_a berechnet man zunächst die Gleichungen der ersten beiden Ableitungsfunktionen von f_a mithilfe der Kettenregel und der Produktregel:

$$f_a'(x)=1\cdot e^{a-x}+(x+a)\cdot e^{a-x}\cdot(-1)=(-x-a+1)\cdot e^{a-x}$$

$$f_a''(x)=(-1)\cdot e^{a-x}+(-x-a+1)\cdot e^{a-x}\cdot(-1)=(x+a-2)\cdot e^{a-x}$$

Notwendige Bedingung:

$$f_a'(x)=0 \;\Rightarrow\; (-x-a+1)\cdot e^{a-x}=0 \;\Rightarrow\; -x-a+1=0 \;\Rightarrow\; x=1-a$$

Hinreichende Bedingung:

$$f_a''(1-a)=(1-a+a-2)\cdot e^{a-1+a}=-e^{2a-1}<0 \qquad \text{(Maximum)}$$

Funktionswert:

$$f_a(1-a)=(1-a+a)\cdot e^{a-1+a}=e^{2a-1}$$

Der lokale Hochpunkt von G_a hat die Koordinaten $\underline{\underline{H_a(1-a\,|\,e^{2a-1})}}$.

Koordinaten des Wendepunktes

Laut Aufgabenstellung wird auf die hinreichende Bedingung für die Existenz des Wendepunktes verzichtet.

Notwendige Bedingung:

$$f_a''(x)=0 \;\Rightarrow\; (x+a-2)\cdot e^{a-x}=0 \;\Rightarrow\; x+a-2=0 \;\Rightarrow\; x=2-a$$

Funktionswert:

$$f_a(2-a)=(2-a+a)\cdot e^{a-2+a}=2e^{2a-2}$$

Der Wendepunkt von G_a hat die Koordinaten $\underline{\underline{W_a(2-a\,|\,2e^{2a-2})}}$.

Gleichung der Wendetangente t_a

Die Gleichung der Tangente an G_a im Punkt $W_a(2-a\,|\,2e^{2a-2})$ berechnet man mithilfe der Punkt-Richtungsgleichung $(y=m\cdot(x-x_0)+y_0)$. Ist m_{t_a} der Tangentenanstieg, so gilt:

$$m_{t_a}=f_a'(2-a)=(-(2-a)-a+1)\cdot e^{a-(2-a)}=-e^{2a-2}$$

Damit ist die Gleichung der Tangente:

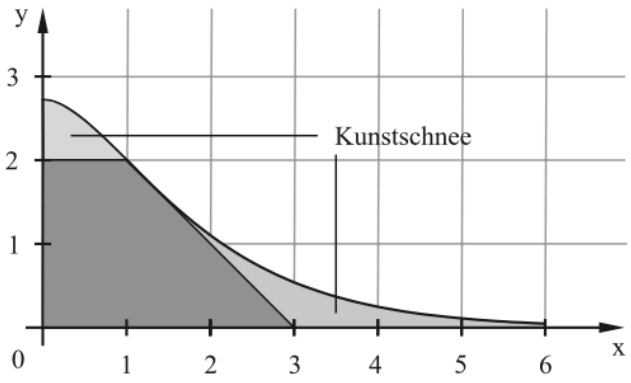
$$t_a(x)=-e^{2a-2}\cdot(x+a-2)+2e^{2a-2} \;\Rightarrow\; \underline{\underline{t_a(x)=-e^{2a-2}\cdot x+(4-a)\cdot e^{2a-2}}}$$

Verhalten der Funktionswerte von f_a für $x\to\pm\infty$

Es gelten die Grenzwerte $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}=0$ und $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x}{e^x}=-\infty$.

e) Eine Stammfunktion von f_1 erhält man durch Einsetzen von $a = 1$ in $F_a(x)$.
Ist A die Maßzahl des im Intervall [0; 6] existierenden Querschnittsinhaltes zwischen G_1 und der x-Achse, so gilt:

$$A = \int_0^6 f_1(x)dx = [-(x+2)\cdot e^{1-x}]_0^6$$
$$= -8\cdot e^{-5} - (-2e)$$
$$= 2e - \frac{8}{e^5}$$



Die Maßzahl T des Querschnittsinhaltes des Unterbaus berechnet sich nach der Trapezformel:

$$T = \frac{1}{2}\cdot(3+1)\cdot 2 = 4$$

Somit ergibt sich die Maßzahl A_K des Querschnittsinhaltes, der mit Kunstschnee aufzufüllen ist, aus der Differenz:

$$A_K = A - T = 2e - \frac{8}{e^5} - 4 \approx 1{,}38$$

Da 1 LE = 10 m und deshalb 1 FE = 100 m^2 gilt und außerdem die Piste eine Breite von 25 m hat, berechnet sich die Maßzahl V des Volumens des Kunstschnees folgendermaßen:

$$V \approx 138\cdot 25 = 3\,450$$

Für die genannte Skipiste werden rund $\underline{\underline{3\,450\ m^3}}$ Kunstschnee benötigt.

Damit gelten auch folgende Grenzwerte:

$$\lim_{x \to \infty} ((x+a) \cdot e^{a-x}) = \lim_{x \to \infty} \frac{(x+a) \cdot e^{a}}{e^{x}} = \underline{\underline{0}}$$

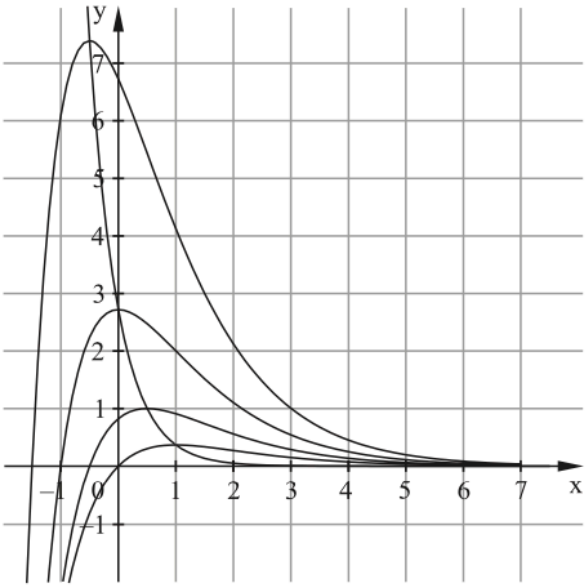
$$\lim_{x \to -\infty} ((x+a) \cdot e^{a-x}) = \lim_{x \to -\infty} \frac{(x+a) \cdot e^{a}}{e^{x}} = \underline{\underline{-\infty}}$$

b) Der von a abhängige Hochpunkt hat die Koordinaten $H_a(1-a \mid e^{2a-1})$.

Aus $x = 1-a$ folgt $a = 1-x$ und eingesetzt in $y = e^{2a-1}$ erhält man die Gleichung der Ortskurve:

$$h(x) = e^{2(1-x)-1} = \underline{\underline{e^{1-2x}}}; \quad x \in \mathbb{R}$$

In der Anlage wurden offenbar für die Graphen G_a die Parameter $a = \left\{\frac{3}{2};\ 1;\ \frac{1}{2} \text{ und } 0\right\}$ gewählt.



c) **Nachweis**

Um zu zeigen, dass $f_a(x) + f_a'(x) = e^{a-x}$ gilt, setzt man die Funktionsterme ein. Es gilt dann:

$$(x+a) \cdot e^{a-x} + (-x-a+1) \cdot e^{a-x} = (x+a-x-a+1) \cdot e^{a-x} = \underline{\underline{e^{a-x}}}$$

Damit ist der Nachweis erbracht.

Stammfunktion

Eine Stammfunktion von f_a wird durch partielle Integration ermittelt.

$$\begin{aligned} F_a(x) &= \int [(x+a) \cdot e^{a-x}]dx \\ &= (a+x) \cdot (-e^{a-x}) - \int (-e^{a-x})dx \\ &= (a+x) \cdot (-e^{a-x}) - e^{a-x} + c \\ &= \underline{\underline{-(x+a+1) \cdot e^{a-x} + c}} \end{aligned}$$

$u(x) = x + a \qquad u'(x) = 1$

$v(x) = -e^{a-x} \qquad v'(x) = e^{a-x}$

d) Zur Berechnung der Maßzahl A_a des Flächeninhaltes der Fläche, die im Intervall $[-a;\ 2-a]$ zwischen G_a und der x-Achse liegt, verwendet man das bestimmte Integral:

$$\begin{aligned} A_a &= \int_{-a}^{2-a} f_a(x)dx = [-(x+a+1) \cdot e^{a-x}]_{-a}^{2-a} \\ &= -3 \cdot e^{2a-2} - (-e^{2a}) = \underline{\underline{e^{2a} \cdot (1 - 3 \cdot e^{-2})}} \end{aligned}$$