Berlin/Brandenburg – Mathematik Leistungskurs
2010 – Aufgabe 1.1: Analysis

Skihalle BE

Gegeben ist die Funktionenschar f_a mit $f_a(x) = (x+a)\cdot e^{a-x}$, $x \in \mathbb{R}$; $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$.
Der Graph der Funktion f_a sei G_a. In der Anlage sind einige Graphen G_a dargestellt.

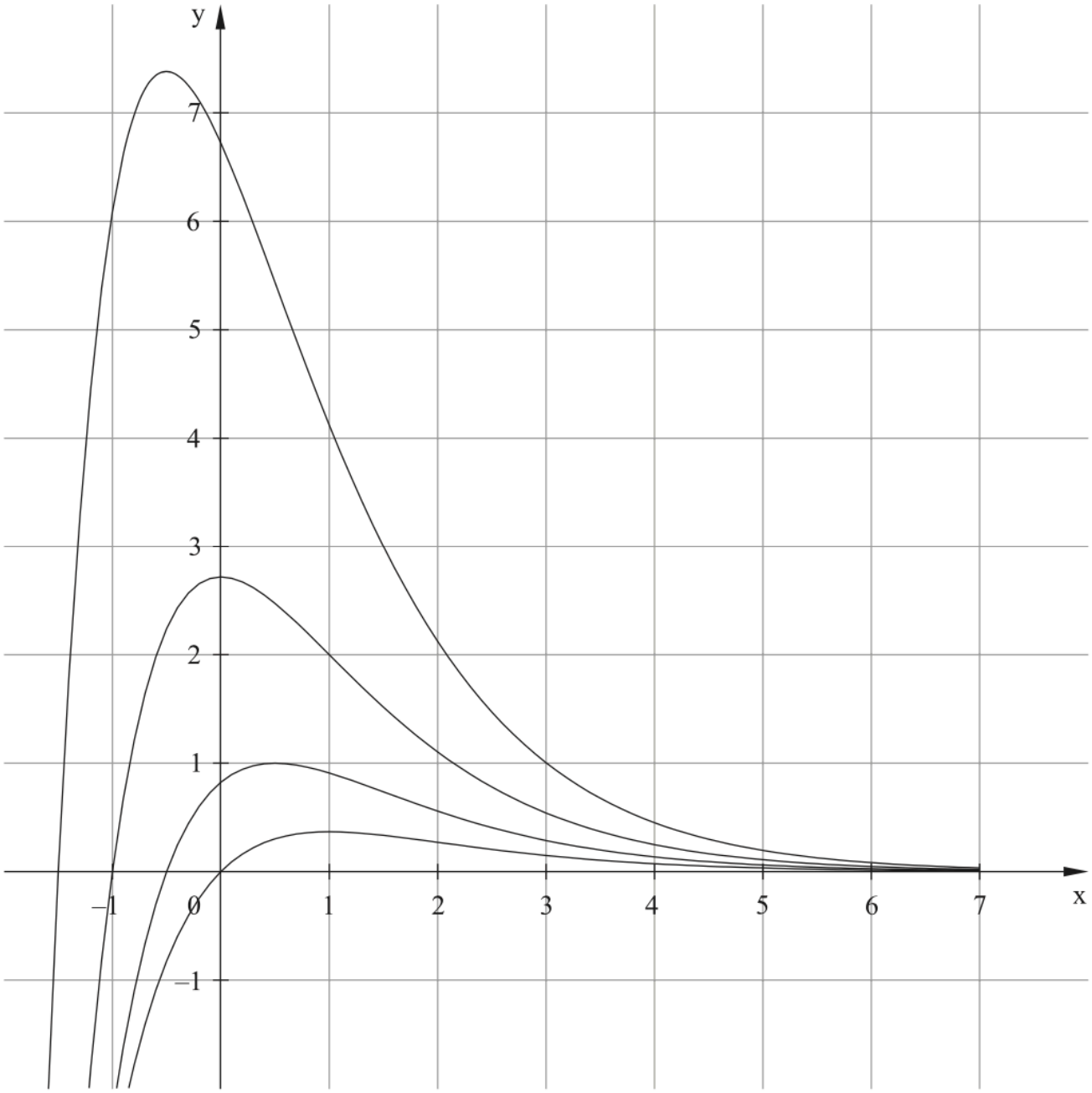
a) Ermitteln Sie die Nullstelle von f_a, die Koordinaten und Art des Extrempunktes sowie die Koordinaten des Wendepunktes von G_a in Abhängigkeit vom Parameter a.
Auf den Nachweis der Existenz des Wendepunktes wird verzichtet.
Bestimmen Sie die Gleichung der Wendetangente t_a.
Untersuchen Sie das Verhalten der Funktionswerte von f_a für $x \to \infty$ und $x \to -\infty$.
[*Kontrollergebnis:* $f_a'(x) = (-x-a+1)\cdot e^{a-x}$] 19

b) Alle Extrempunkte $E_a(1-a \mid e^{2a-1})$ der Graphen G_a liegen auf dem Graphen einer Funktion h. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung für h. Ergänzen Sie die Zeichnung um den Graphen von h. 6

c) Weisen Sie nach, dass für alle Funktionen f_a die Gleichung $f_a(x) + f_a'(x) = e^{a-x}$ gilt. Ermitteln Sie eine Stammfunktion von f_a.
[*Kontrollergebnis:* $F_a(x) = (-1-a-x)\cdot e^{a-x} + c$] 6

d) Berechnen Sie den Inhalt der zwischen G_a und der x-Achse liegenden Fläche über dem Intervall $[-a; 2-a]$. 4

e) Der Graph der Funktion f_1 beschreibt für $x \geq 0$ im Modell das Profil der Skipiste in einer Skihalle (1 LE = 10 m). Das Profil des Hallenbodens liegt auf der x-Achse. Der Querschnitt des Unterbaus der Piste ist ein rechtwinkliges Trapez, das begrenzt wird durch die beiden Koordinatenachsen, einer Parallelen zur x-Achse durch den Wendepunkt $W_1(1 \mid 2)$ von G_1 und der zugehörigen Wendetangente $y = -x + 3$.
Der Raum oberhalb des Unterbaus wird mit Kunstschnee aufgefüllt, bis die gewünschte Profilform der Piste erreicht ist.
Berechnen Sie, wie viele Kubikmeter Kunstschnee für eine Piste von 25 m Breite und einer waagerechten Länge von 60 m hergestellt werden müssen. 5

40

Anlage zu Aufgabe 1.1