Lösungen zu Aufgabe 1.2

a) **Definitionsbereich und Asymptoten**
Der Nenner darf nicht null werden. Dadurch ergeben sich die Definitionslücken.
Es gilt:

$$a \cdot x - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{a}$$

Damit ist der Definitionsbereich $\underline{\underline{\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{a}\right\}}}$.

Die Polgeraden liegen parallel zur y-Achse:

$$\underline{\underline{x = \frac{1}{a}}}$$

Die Gleichung der Asymptote für $x \to \pm\infty$ ergibt sich durch das Grenzverhalten des Quotienten in der Ausgangsfunktion.

Für $x \to \pm\infty$ geht $\frac{1}{ax-1} \to 0$, somit gilt $f_a(x) \to ax$.

Die Gleichung der Asymptote lautet allgemein: $\underline{\underline{a(x) = ax}}$

Zuordnung der Graphen
Die Zuordnung zu den Funktionsgraphen ergibt sich aus den Polstellen.

	$a = 1$	$a = 2$	$a = \frac{1}{5}$
Definitionsbereich	$\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$	$\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$	$\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{5\}$
Polasymptote	$x = 1$	$x = \frac{1}{2}$	$x = 5$
Asymptote für $x \to \pm\infty$	$a(x) = x$	$a(x) = 2x$	$a(x) = \frac{1}{5}x$
Graph	$\underline{\underline{G_I}}$	$\underline{\underline{G_{III}}}$	$\underline{\underline{G_{II}}}$

b) **Extrempunkte**
Die Bedingungen lauten: $f_a'(x) = 0$ und $f_a''(x) \neq 0$

$$0 = a - \frac{a}{(ax-1)^2}$$

$$a = \frac{a}{(ax-1)^2} \qquad |:a \qquad |\cdot(ax-1)^2$$

$$(ax-1)^2 = 1$$

$$ax - 1 = \pm 1$$

$$ax - 1 = 1 \quad \text{oder} \quad ax - 1 = -1$$

$$ax = 2 \qquad\qquad ax = 0$$

$$x = \frac{2}{a} \qquad\qquad x = 0$$

Zur Herleitung der 2. Ableitung kann man den Quotienten in der 1. Ableitung in die Potenzform umschreiben. Dann ist die Kettenregel zu beachten, sonst zusätzlich die Quotientenregel.

1. Möglichkeit:

$$f_a'(x) = a - a(ax-1)^{-2}$$

$$f_a''(x) = -a \cdot (-2) \cdot a \cdot (ax-1)^{-3} = \frac{2a^2}{(ax-1)^3}$$

2. Möglichkeit: (über Quotienten- und Kettenregel)

$$f_a'(x) = a - \frac{a}{(ax-1)^2}$$

$$f_a''(x) = 0 - \frac{0 - a \cdot 2(ax-1) \cdot a}{(ax-1)^4} = \frac{2a^2}{(ax-1)^3}$$

$f_a''(0) = \frac{2a^2}{-1} < 0$, somit liegt für $x = 0$ bei allen Funktionsgraphen ein relatives Maximum vor.

$f_a''\left(\frac{2}{a}\right) = \frac{2a^2}{\left(a \cdot \frac{2}{a} - 1\right)^3} = \frac{2a^2}{1} > 0$, somit liegt für $x = \frac{2}{a}$ bei allen Funktionsgraphen ein relatives Minimum T vor.

Die zugehörigen Funktionswerte der relativen Extrema erhält man durch Einsetzen in die Ausgangsgleichung.

$$f_a(0) = -1$$

$$f_a\left(\frac{2}{a}\right) = a \cdot \frac{2}{a} + \frac{1}{a \cdot \frac{2}{a} - 1} = 2 + 1 = 3$$

$$\underline{\underline{E(0|-1)}}; \quad \underline{\underline{T_a\left(\frac{2}{a}\middle|3\right)}}$$

Ermittlung von a

Der Abstand von zwei Punkten lässt sich über den Satz des Pythagoras bestimmen:

$$d(A;B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

$$d = (E;T_a) = \sqrt{(3+1)^2 + \left(\frac{2}{a}\right)^2} = \sqrt{17} \qquad |\text{quadrieren}$$

$$16 + \frac{4}{a^2} = 17$$

$$\frac{4}{a^2} = 1$$

$$4 = a^2$$

$$a = \pm 2$$

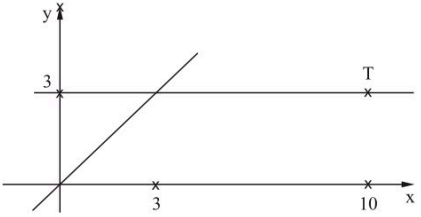
Für die Wahl von $\underline{\underline{a = \pm 2}}$ haben die relativen Extrema die Entfernung von $\sqrt{17}$ LE.

c) **Ermittlung von b**

Da die Tangente im Tiefpunkt parallel zur x-Achse ist, gilt für die Steigungszahl der gesuchten Ursprungsgeraden:

$$m = \tan 45° = 1$$

Die Gleichung der Ursprungsgeraden g lautet daher: $\underline{\underline{y = x}}$



Flächeninhalt des Dreiecks

Anhand der Skizze erkennt man:

$$A = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 = \underline{\underline{4{,}5 \text{ FE}}}$$

d) Da die Fläche ganz im 4. Quadranten liegt, ist das bestimmte Integral in den Grenzen von 0 bis 3 negativ.

Das unbestimmte Integral des Quotienten ist mithilfe der Substitutionsmethode zu berechnen.

$$\int \frac{1}{\frac{1}{5}x - 1} dx = \int 5 \cdot \frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{5}x - 1} dx = \int 5 \cdot \frac{1}{z} dz \qquad z = \frac{1}{5}x - 1$$

$$= 5 \cdot \ln|z| + c = 5 \cdot \ln\left|\frac{1}{5}x - 1\right| + c \qquad dx = 5dz$$

Damit gilt:

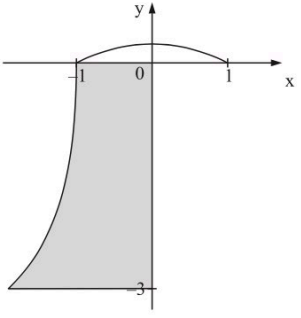
$$\int_0^3 \left(\frac{1}{5}x + \frac{1}{\frac{1}{5}x - 1}\right) dx = \left[\frac{1}{10}x^2 + 5 \cdot \ln\left|\frac{1}{5}x - 1\right|\right]_0^3$$

$$= \frac{9}{10} + 5 \cdot \ln\frac{2}{5} - 5 \cdot \ln 1 = \frac{9}{10} + 5 \cdot \ln\frac{2}{5}$$

$$\approx -3{,}68 \text{ FE}$$

Der Inhalt der Fläche beträgt etwa $\underline{\underline{3{,}68 \text{ FE}}}$.

e) Die Skizze zeigt die Drehung um 90° und die Parabel für den Dachquerschnitt.



Die allgemeine Gleichung einer Parabel symmetrisch zur y-Achse lautet:

$$p(x) = ax^2 + c$$

Dabei ist klar, dass a negativ sein muss, da die Parabel nach unten geöffnet ist, und c muss positiv sein.

Durch die Koordinaten eines Punktes und die Festlegung der Flächenmaßzahl kann man ein Gleichungssystem mit zwei Variablen zur Bestimmung der Parabelgleichung aufstellen.

$$(1|0) \in p: \; 0 = a + c$$

$$c = -a$$

Die vorgeschriebene Querschnittsfläche von $\frac{1}{3}$ FE und die Bedingung $c = -a$ führen zu folgender Gleichung:

$$2 \cdot \int_0^1 (ax^2 - a)\,dx = \frac{1}{3}$$

$$\int_0^1 (ax^2 - a)\,dx = \frac{1}{6}$$

$$\left[\frac{a}{3}x^3 - ax\right]_0^1 = \frac{1}{6}$$

$$\frac{a}{3} - a = \frac{1}{6}$$

$$-\frac{2}{3}a = \frac{1}{6}$$

$$a = -\frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad c = \frac{1}{4}$$

Die Gleichung der gesuchten Parabel lautet:

$$\underline{\underline{p(x) = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}}}$$