Kassenhäuschen BE

Gegeben ist die Funktionenschar f_a mit der Gleichung

$f_a(x) = ax + \frac{1}{ax-1}$; $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

Die Graphen dieser Funktionen sind G_a. Die Graphen der Schar mit $a = 1; 2; \frac{1}{5}$ sind in der Anlage vorgegeben.

a) Geben Sie den Definitionsbereich von f_a und die Gleichungen aller Asymptoten einschließlich der Polgeraden von G_a an.
Ordnen Sie den vorgegebenen Graphen die zugehörigen Parameterwerte a zu und begründen Sie Ihre Entscheidung. 7

b) Zeigen Sie, dass $E(0 \mid f_a(0))$ lokaler Extrempunkt aller Graphen G_a ist und ermitteln Sie dessen Art. Ohne Nachweis dürfen Sie verwenden: $f_a'(x) = a - \frac{a}{(ax-1)^2}$.

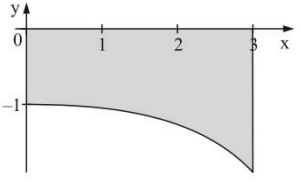
Neben E hat jeder Graph G_a einen weiteren lokalen Extrempunkt T. Bestimmen Sie dessen Koordinaten und weisen Sie nach, dass dieser stets ein lokaler Tiefpunkt des Graphen ist.

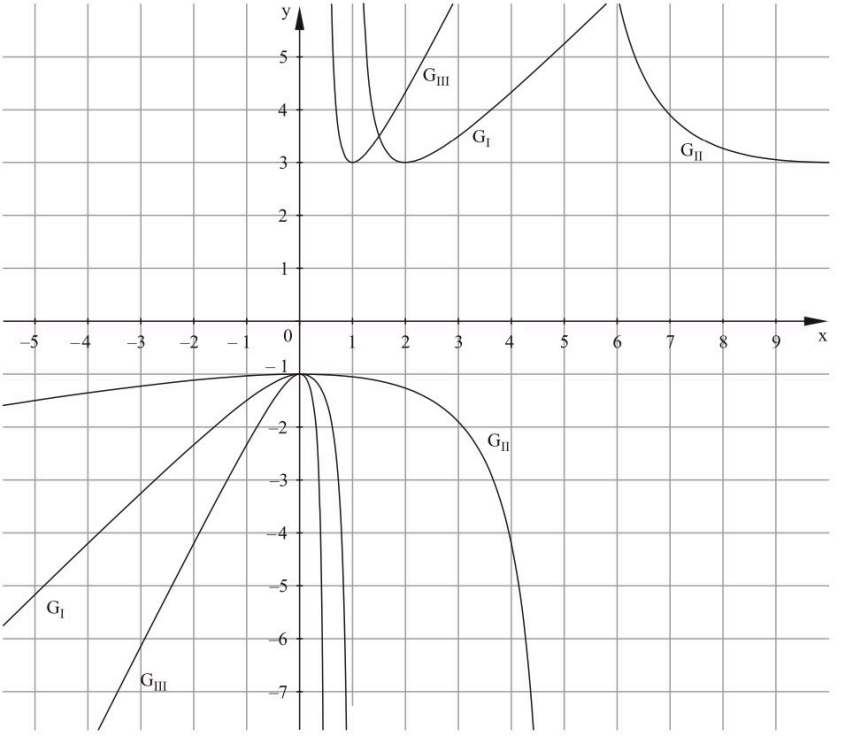
[*Kontrollergebnis*: $T\left(\frac{2}{a} \,\middle|\, 3\right)$]

Berechnen Sie diejenigen Werte a, für die die Punkte E und T einen Abstand von $\sqrt{17}$ LE haben. 17

c) Eine Ursprungsgerade g mit der Gleichung $y = bx$ mit $b > 0$ und die Tangente t im Tiefpunkt von G_2 schließen einen Winkel von 45° ein. Bestimmen Sie b für diesen Fall. Die y-Achse, die Gerade mit der Gleichung $y = x$ und die Tangente t begrenzen ein Dreieck. Berechnen Sie den Flächeninhalt dieses Dreiecks. 6

d) Der Graph $G_{\frac{1}{5}}$ schließt mit der Geraden mit der Gleichung $x = 3$ und den beiden Koordinatenachsen eine Fläche ein (siehe Darstellung).
Berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche. 5



e) Die in Aufgabe d beschriebene Fläche wird um den Koordinatenursprung um 90° im Uhrzeigersinn gedreht. Der Körper, der durch Rotation dieser Fläche um die y-Achse entsteht, entspricht modellhaft der Form eines Kassenhäuschens mit kreisförmiger Grund- und Deckfläche (1 LE = 1 m). Der größere der beiden Kreise beschreibt die Grundfläche.
Ein Architekturbüro plant für das Kassenhäuschen ein Dach, welches einen parabelförmigen Querschnitt besitzt. Das passgenau aufgesetzte Dach soll eine Querschnittsfläche von $\frac{1}{3}\,\text{m}^2$ besitzen. Ermitteln Sie die Gleichung eines möglichen Graphen, der die obere Begrenzung des Dachquerschnittes beschreibt. $\frac{4}{40}$

Anlage