Lösungen zu Aufgabe 2.1

a) **Geradengleichungen**

Die Astronomen beobachten den Meteoriten entlang der Geraden g_1 bzw. g_2:

$$g_1\colon \vec{x} = \overrightarrow{OA} + r \cdot \vec{u}_1 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}}}; \; r \in \mathbb{R}$$

$$g_2\colon \vec{x} = \overrightarrow{OB} + s \cdot \vec{u}_2 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 21 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}}}; \; s \in \mathbb{R}$$

Koordinaten des Punktes P_1

Da die Astronomen den Meteoriten zeitgleich entdecken, befindet er sich in diesem Moment im Schnittpunkt der beiden Beobachtungsgeraden. Zur Bestimmung der Koordinaten des Schnittpunktes setzt man die rechten Seiten der Parametergleichungen gleich und ermittelt aus dem entstehenden Gleichungssystem die Werte für r bzw. s.

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 21 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{ll} \text{I} & -3 = -2 \cdot r + s \\ \text{II} & -15 = -r - s \\ \text{III} & 0 = -3 \cdot r + 2 \cdot s \end{array}$$

Aus I + II folgt $r = 6$. Eingesetzt in III erhält man $s = 9$. Mit einem der beiden Parameterwerte und der zugehörigen Gleichung wird der Ortsvektor des Punktes P_1 berechnet:

$$\overrightarrow{OP_1} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + 6 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 12 \\ 18 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad P_1(17 \mid 12 \mid 18)$$

Die Astronomen entdecken den Meteoriten im Punkt $\underline{\underline{P_1(17 \mid 12 \mid 18)}}$.

b) **Geschwindigkeit des Meteoriten**

Die Geschwindigkeit v eines sich geradlinig gleichförmig bewegenden Körpers ergibt sich aus der Formel $v = \frac{s}{t}$, wobei s der Weg und t die dafür benötigte Zeit ist.

$$s = |\overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1}| \text{ km} = \left| \begin{pmatrix} 35 \\ 30 \\ 15 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 17 \\ 12 \\ 18 \end{pmatrix} \right| \text{ km} = \sqrt{18^2 + 18^2 + (-3)^2} \text{ km} \approx 25{,}6 \text{ km}$$

$$t = 1 \text{ min} = \frac{1}{60} \text{ h}$$

$$v \approx \frac{25{,}6 \text{ km}}{\frac{1}{60} \text{ h}} \approx 1\,538 \, \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Der Meteorit hat eine Geschwindigkeit von rund $\underline{\underline{1\,538 \, \frac{\text{km}}{\text{h}}}}$.

Aufschlagpunkt
Die Erdoberfläche liegt angenähert in der x-y-Ebene. Der Aufschlagpunkt ist der Schnittpunkt der Bewegungsgeraden des Meteoriten mit dieser Ebene.

$$m: \vec{x} = \overrightarrow{OP_1} + t' \cdot \overrightarrow{P_1P_2} = \begin{pmatrix} 17 \\ 12 \\ 18 \end{pmatrix} + t' \cdot \begin{pmatrix} 18 \\ 18 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 12 \\ 18 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}; \quad t', t \in \mathbb{R}$$

Für die z-Koordinate eines Punktes in der x-y-Ebene gilt $z = 0$ und damit:

$$18 - t = 0 \quad \Rightarrow \quad t = 18$$

Wird dieser Parameterwert in die Gleichung der Geraden m eingesetzt, so erhält man den Ortsvektor des Aufschlagpunktes P:

$$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 17 \\ 12 \\ 18 \end{pmatrix} + 18 \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 125 \\ 120 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{P(125|120|0)}}$$

Aufschlagwinkel
Der Aufschlagwinkel wird mithilfe des Richtungsvektors der Geraden m und des Normalenvektors der x-y-Ebene unter Verwendung des Skalarproduktes berechnet. Für m gilt

$\vec{n} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}$ und für die x-y-Ebene $\vec{n}_{xy} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\sin\alpha = \frac{|\vec{n} \circ \vec{n}_{xy}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{n}_{xy}|} = \frac{\left|\begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right|} = \frac{|0+0-1|}{\sqrt{73} \cdot \sqrt{1}} = \frac{1}{73} \cdot \sqrt{73} \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx 6{,}7°$$

Die Bahn des Meteoriten trifft die Erdoberfläche unter einem Winkel von rund $\underline{\underline{6{,}7°}}$.

c) Zur Berechnung wird eine Punkt-Normalengleichung der Hilfsebene H aufgestellt, die senkrecht zur Meteoritenbahn m ist und die Bergspitze S(85|63|2) enthält. Diese Ebene H wird mit der Geraden m zum Schnitt gebracht. Der Schnittpunkt ist der gesuchte Punkt Q der Meteoritenbahn.

$$H: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 85 \\ 63 \\ 2 \end{pmatrix}\right] \circ \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad 6x + 6y - z = 886$$

$m \cap H$:

$$\begin{aligned} 6 \cdot (17 + 6t) + 6 \cdot (12 + 6t) - (18 - t) &= 886 \\ 102 + 36t + 72 + 36t - 18 + t &= 886 \\ 73t &= 730 \\ t &= 10 \end{aligned}$$

Mit dem Parameterwert $t = 10$ erhält man aus der Gleichung von m den Ortsvektor des gesuchten Punkes Q:

$$\overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix} 17 \\ 12 \\ 18 \end{pmatrix} + 10 \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 77 \\ 72 \\ 8 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad Q(77|72|8)$$

Der Meteorit ist im Punkt $\underline{\underline{Q(77|72|8)}}$ der Bergspitze S am nächsten.

d) Da die Richtungsvektoren der Geraden, die die Bahnen von Flugzeug und Meteorit repräsentieren, nicht kollinear sind und die Aufgabe fordert, den Abstand dieser Geraden zu bestimmen, darf davon ausgegangen werden, dass es sich um windschiefe Geraden handelt.

1. Möglichkeit:
Zur Berechnung des Abstandes d windschiefer Geraden f (Flugzeugbahn) und m (Meteoritenbahn) findet man in Tafelwerken eine Formel, die mit der Symbolik dieser Aufgabe folgendermaßen beschrieben wird:

$$d(f, m) = \left| (\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OF}) \circ \vec{n}_0 \right|$$

Dabei sind $\overrightarrow{OM}$ und $\overrightarrow{OF}$ die Stützvektoren der Geraden m und f und $\vec{n}_0$ ist der Normaleneinheitsvektor, d. h. der auf die Länge 1 normierte Vektor, der sowohl zu f als auch zu m senkrecht ist.

Ein Normalenvektor $\vec{n}$ ergibt sich z. B. durch das Vektorprodukt der Richtungsvektoren der Geraden f und m.

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 9 \\ 18 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n}_0 = \frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$d(f, m) = \left| \left(\begin{pmatrix} 17 \\ 12 \\ 18 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 \\ 47 \\ 32 \end{pmatrix} \right) \circ \left(\frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \right) \right|$$

$$= \frac{1}{7} \cdot \left| \begin{pmatrix} 7 \\ -35 \\ -14 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \right|$$

$$= \frac{1}{7} \cdot |-14 - 105 - 84|$$

$$= \frac{203}{7} = 29$$

2. Möglichkeit:
Man gibt zu jeder Geraden den Ortsvektor eines parameterabhängigen Punktes an, ermittelt den zugehörigen Verbindungsvektor und bestimmt mithilfe des Skalarproduktes die Parameterwerte so, dass der Verbindungsvektor senkrecht zu jeder der beiden Geraden ist.

Ortsvektor eines Geradenpunktes der Flugzeugbahn:

$$\overrightarrow{OF} = \begin{pmatrix} 10 + 3s \\ 47 \\ 32 + s \end{pmatrix}; \; s \in \mathbb{R}$$

Ortsvektor eines Geradenpunktes der Meteoritenbahn:

$$\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} 17 + 6t \\ 12 + 6t \\ 18 - t \end{pmatrix}; \; t \in \mathbb{R}$$

Verbindungsvektor:

$$\overrightarrow{FM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OF} = \begin{pmatrix} 7 - 3s + 6t \\ -35 + 6t \\ -14 - s - t \end{pmatrix}$$

Werden nun, um die Bedingungen der Orthogonalität zu erfüllen, die Skalarprodukte des Verbindungsvektors mit dem jeweiligen Richtungsvektor der Geraden f und m gleich null gesetzt, so ergibt sich ein Gleichungssystem aus zwei Gleichungen mit zwei Parametern:

$$\text{I} \quad \begin{pmatrix} 7-3s+6t \\ -35+6t \\ -14-s-t \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \quad 21-9s+18t-14-s-t=0 \quad \Rightarrow \quad 7-10s+17t=0$$

$$\text{II} \quad \begin{pmatrix} 7-3s+6t \\ -35+6t \\ -14-s-t \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \quad 42-18s+36t-210+36t+14+s+t=0 \quad \Rightarrow \quad -154-17s+73t=0$$

I nach s aufgelöst:

$$10s = 7+17t \quad \Rightarrow \quad s = \frac{7}{10}+\frac{17}{10}t$$

In II eingesetzt:

$$-154-\frac{119}{10}-\frac{289}{10}t+73t=0$$

$$\frac{441}{10}t = \frac{1\,659}{10}$$

$$t = \frac{79}{21}$$

In I eingesetzt:

$$s = \frac{7}{10}+\frac{17}{10}\cdot\frac{79}{21} = \frac{149}{21}$$

Mithilfe dieser Parameterwerte erhält man den Verbindungsvektor $\overrightarrow{FM}$ so, dass sein Betrag der Länge des Abstandes von Meteoritenbahn und Flugbahn entspricht:

$$|\overrightarrow{FM}| = \left| \begin{pmatrix} 7-3\cdot\frac{149}{21}+6\cdot\frac{79}{21} \\ -35+6\cdot\frac{79}{21} \\ -14-\frac{149}{21}-\frac{79}{21} \end{pmatrix} \right| = \left| \frac{1}{7}\cdot\begin{pmatrix} 58 \\ -87 \\ -174 \end{pmatrix} \right|$$

$$= \frac{\sqrt{58^2+(-87)^2+(-174)^2}}{7} = 29$$

Der Abstand zwischen Meteoritenbahn und Flugzeugbahn beträgt $\underline{\underline{29\text{ km}}}$.

e) Der Radarbereich kann als Kugel mit dem Mittelpunkt T(107 | 102 | 3) und dem Radius $r=50$ betrachtet werden. Diese Kugel K hat folgende Gleichung:

$$K: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 107 \\ 102 \\ 3 \end{pmatrix}\right]^2 = 50^2$$

Um die Schnittpunktkoordinaten der Geraden m mit der Kugel K zu bestimmen, setzt man für $\vec{x}$ den Ortsvektor eines parameterabhängigen Geradenpunktes von m in die Gleichung von K ein:

$$K: \left[\begin{pmatrix}17+6t\\12+6t\\18-t\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}107\\102\\3\end{pmatrix}\right]^2=50^2 \quad\Rightarrow\quad \left[\begin{pmatrix}-90+6t\\-90+6t\\15-t\end{pmatrix}\right]^2=50^2$$

Diese Gleichung kann auch in folgender Form geschrieben werden:

$$\begin{aligned}(-90+6t)^2+(-90+6t)^2+(15-t)^2&=2\,500\\ 8\,100-1\,080t+36t^2+8\,100-1\,080t+36t^2+225-30t+t^2&=2\,500\\ 16\,425-2\,190t+73t^2&=2\,500\\ 73t^2-2\,190t+13\,925&=0\\ t^2-30t+\frac{13\,925}{73}&=0\end{aligned}$$

Die quadratische Gleichung hat die Lösungen:

$$t_1=15-\frac{50\cdot\sqrt{73}}{73}\approx 9 \quad \text{bzw.} \quad t_2=15+\frac{50\cdot\sqrt{73}}{73}\approx 21$$

Setzt man die (ganzzahlig gerundeten) Parameterwerte in die Gleichung von m ein, so ergeben sich näherungsweise die Ortsvektoren der Schnittpunkte R_1 und R_2 zwischen der Geraden m und der Kugel K:

$$R_1=\overrightarrow{OR_1}=\begin{pmatrix}17\\12\\18\end{pmatrix}+9\cdot\begin{pmatrix}6\\6\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}71\\66\\9\end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad R_1(71\,|\,66\,|\,9)$$

$$R_2=\overrightarrow{OR_2}=\begin{pmatrix}17\\12\\18\end{pmatrix}+21\cdot\begin{pmatrix}6\\6\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}143\\138\\-3\end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad R_2(143\,|\,138\,|\,-3)$$

Der Punkt $R_2(143\,|\,138\,|\,-3)$ liegt im V. Oktanten des Koordinatensystems und damit „unter“ der x-y-Ebene. Damit wird der Meteorit im Punkt $\underline{\underline{R_1(71\,|\,66\,|\,9)}}$ erstmals vom Radar erfasst.

Es kann auch über die Entfernungen zum ersten Beobachtungsort P_1 argumentiert werden: Der Abstand von P_1 zu R_1 beträgt rund 77 km und zu R_2 (theoretisch) ca. 179 km.