Lösungen zu Aufgabe 1.1

a) **Relative Extrempunkte**

Man bestimmt die Gleichungen der ersten beiden Ableitungsfunktionen von f mithilfe von Summen-, Produkt- und Kettenregel.

$$f(x) = (-4x - 80) \cdot e^{-\frac{x}{20}} + 80; \quad x \in \mathbb{R}$$

$$f'(x) = (-4) \cdot e^{-\frac{x}{20}} + (-4x - 80) \cdot \left(-\frac{1}{20} \cdot e^{-\frac{x}{20}}\right)$$

$$= (-4) \cdot e^{-\frac{x}{20}} + \left(\frac{1}{5}x + 4\right) \cdot e^{-\frac{x}{20}} = \left(-4 + \frac{1}{5}x + 4\right) \cdot e^{-\frac{x}{20}} = \frac{1}{5}x \cdot e^{-\frac{x}{20}}$$

$$f''(x) = \frac{1}{5} \cdot e^{-\frac{x}{20}} + \frac{1}{5}x \cdot \left(-\frac{1}{20} \cdot e^{-\frac{x}{20}}\right) = \left(\frac{1}{5} - \frac{x}{100}\right) \cdot e^{-\frac{x}{20}}$$

Notwendige Bedingung:

$$f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{5}x \cdot e^{-\frac{x}{20}} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$$

Es gilt: $e^x \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$

Hinreichende Bedingung:

$$f''(0) = \left(\frac{1}{5} - \frac{0}{100}\right) \cdot e^{-\frac{0}{20}} = \frac{1}{5} > 0 \quad \text{(Minimum)}$$

Funktionswert:

$$f(0) = (-4 \cdot 0 - 80) \cdot e^{-\frac{0}{20}} + 80 = -80 + 80 = 0$$

Der Graph von f besitzt genau einen relativen Extrempunkt mit den Koordinaten $\underline{\underline{T(0|0)}}$.

Wendepunkt

Laut Aufgabenstellung existiert genau ein Wendepunkt und es kann auf die hinreichende Bedingung verzichtet werden.

Notwendige Bedingung:

$$f''(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{1}{5} - \frac{x}{100}\right) \cdot e^{-\frac{x}{20}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{5} - \frac{x}{100} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 20$$

Funktionswert:

$$f(20) = (-4 \cdot 20 - 80) \cdot e^{-\frac{20}{20}} + 80 = -\frac{160}{e} + 80 \approx 21{,}1$$

Der Wendepunkt des Graphen von f hat die Koordinaten $\underline{\underline{W(20|\approx 21{,}1)}}$.

Verhalten der Funktionswerte für $x \to +\infty$

Für den ersten Summanden $(-4x - 80) \cdot e^{-\frac{x}{20}}$ gilt:

$$\lim_{x \to \infty} (-4x - 80) = -\infty \quad \text{und} \quad \lim_{x \to \infty} e^{-\frac{x}{20}} = 0$$

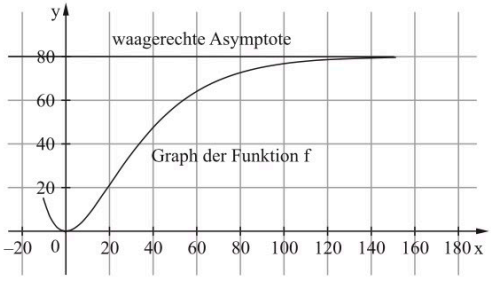
Da in dem Produkt der Einfluss der Exponentialfunktion größer ist als der der linearen Funktion, gilt:

$$\lim_{x \to \infty} (-4x - 80) \cdot e^{-\frac{x}{20}} = 0$$

Für den Funktionsterm folgt damit:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} (-4x - 80) \cdot e^{-\frac{x}{20}} + \lim_{x \to \infty} 80 = 0 + 80 = \underline{\underline{80}}$$

b)



c) **Maximale Beschleunigung**
Eine Maximalstelle x_{max} von $a = f'(x)$ ermittelt man durch Anwendung des notwendigen Kriteriums $f''(x) = 0$. Diese Gleichung wurde bereits in Teilaufgabe a gelöst und es gilt $x_{max} = 20$. Die maximale Beschleunigung des Fahrzeugs wird nach $\underline{\underline{20 \text{ Sekunden}}}$ erreicht.

Berechnung von drei Funktionswerten von f'

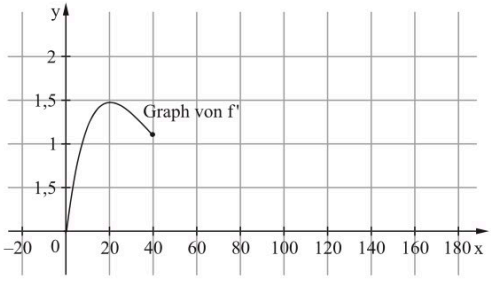
$$f'(x) = \frac{1}{5} x \cdot e^{-\frac{x}{20}}$$

$$f'(0) = \frac{1}{5} \cdot 0 \cdot e^{-\frac{0}{20}} = \underline{\underline{0}}$$

$$f'(20) = \frac{1}{5} \cdot 20 \cdot e^{-\frac{20}{20}} = \frac{4}{e} \approx \underline{\underline{1{,}5}}$$

$$f'(40) = \frac{1}{5} \cdot 40 \cdot e^{-\frac{40}{20}} = \frac{8}{e^2} \approx \underline{\underline{1{,}1}}$$

Darstellung des Graphen von f' im Intervall $0 \le x \le 40$



d) **Bestimmung des Funktionsterms g(x)**
Damit sich der Graph der linearen Funktion g an den Graphen von f' an der Stelle $x = 40$ tangential anschließt, ist für den Anstieg von g die Ableitung von f' an dieser Stelle, also f''(40), bestimmend:

$$f''(40) = \left(\frac{1}{5} - \frac{40}{100}\right) \cdot e^{-\frac{40}{20}} = -\frac{1}{5}e^{-2} = -\frac{1}{5 \cdot e^2}$$

Mithilfe des Anschlusspunktes $P\left(40 \,\middle|\, \frac{8}{e^2}\right)$ kann nun die Punkt-Richtungsgleichung von g angegeben werden:

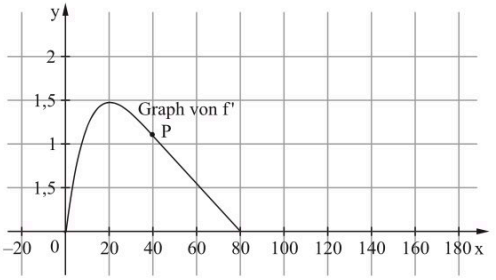
$$g(x) = -\frac{1}{5 \cdot e^2} \cdot (x - 40) + \frac{8}{e^2} = -\frac{1}{5 \cdot e^2} \cdot x + \frac{16}{e^2} = \underline{\underline{-0{,}2e^{-2} \cdot x + 16e^{-2}}}$$

Berechnung des Zeitpunktes x_0
Die nun linear abnehmende Beschleunigung ist dann null, wenn $g(x) = 0$ gilt.

$$g(x) = 0 \;\Rightarrow\; -0{,}2e^{-2} \cdot x + 16e^{-2} = 0 \;\Rightarrow\; 0{,}2e^{-2} \cdot x = 16e^{-2} \;\Rightarrow\; x_0 = 80$$

Nach $\underline{\underline{80 \text{ Sekunden}}}$ ist die Maßzahl der Beschleunigung null.

Ergänzung der grafischen Darstellung



e) Der Inhalt der Fläche zwischen den beiden Graphen von f' sowie g und der x-Achse wird aufgeteilt in die Intervalle [0; 40] mit der Maßzahl des Flächeninhaltes A_1 und [40; 80] mit der Maßzahl des Flächeninhaltes A_2.

$$A_1 = \int_0^{40} f'(x)dx = [f(x)]_0^{40} = [(-4x - 80) \cdot e^{-\frac{x}{20}} + 80]_0^{40} = (80 - 240e^{-2}) - 0 \approx 47{,}5$$

Die Maßzahl A_2 erhält man durch die Flächenformel des rechtwinkligen Dreiecks:

$$A_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{e^2} \cdot 40 = 160e^{-2} \approx 21{,}7$$

Die Summe der beiden Maßzahlen beträgt:

$$A_1 + A_2 = 80 - 240e^{-2} + 160e^{-2} = 80 - 80e^{-2} \approx \underline{\underline{69{,}2}}$$

Nach 80 Sekunden hat das Testfahrzeug eine Geschwindigkeit von rund $69{,}2\,\frac{m}{s}$ erreicht. Das entspricht einer Geschwindigkeit von etwa $69{,}2 \cdot 3{,}6\,\frac{km}{h} \approx \underline{\underline{249\,\frac{km}{h}}}$.