Lösungen zu Aufgabe 1.1

a) **Definitionsbereich der Funktionsschar f_a**

Bei den Funktionen $f_a(x) = \frac{(x-3a)^2}{x-a} = \frac{Z_a(x)}{N_a(x)}$ handelt es sich um eine Schar unecht gebrochen-rationaler Funktionen, da der Grad der Zählerfunktionen Z_a größer ist als der Grad der Nennerfunktionen N_a.

Die Schar f_a ist für x mit $N_a(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = a$ nicht definiert. Daraus ergibt sich der Definitionsbereich:

$$\underline{\underline{\mathbb{D}_{f_a} = \{x \mid x \in \mathbb{R},\ x \neq a\}}}$$

Begründung, dass x = a eine Polstelle ist

An der Stelle $x = a$ gilt für die Nennerfunktion $N_a(a) = 0$. Die Zählerfunktion $Z_a(a)$ ist jedoch an dieser Stelle wegen $a > 0$ von null verschieden. Damit ist der Funktionsterm an der Stelle $x = a$ nicht definiert und die Schar f_a hat dort eine Polstelle.

Der Pol ist ungerade, da die Zählerfunktion nicht negativ ist und das Vorzeichen von f_a bei Annäherung an die Polstelle durch die Nennerfunktion bestimmt wird. Ist $x < a$, so ist $f_a(x)$ negativ, und ist $x > a$, so ist $f_a(x)$ positiv. Der Graph von f_a nähert sich also von links im Negativen und von rechts im Positiven an die Polgerade (senkrechte Asymptote) an. Dabei werden die Funktionswerte für $x \to a$ von links immer kleiner und von rechts immer größer.

Gleichung der schrägen Asymptote

$$f_a(x) = \frac{(x-3a)^2}{x-a} = \frac{x^2 - 6ax + 9a^2}{x-a}$$

Man formt den Quotienten $\frac{Z_a(x)}{N_a(x)}$ durch Polynomdivision in eine Summe um.

$$\begin{array}{l} (x^2 - 6ax + 9a^2) : (x-a) = x - 5a + \dfrac{4a^2}{x-a} \\ \underline{-(x^2 - ax)} \\ \quad -5ax + 9a^2 \\ \quad \underline{-(-5ax + 5a^2)} \\ \qquad\quad 4a^2 \end{array}$$

In der Summe $x - 5a + \frac{4a^2}{x-a}$ geben die ersten beiden Summanden die Gleichung der Asymptote an.

Gleichung der Asymptote:

$$\underline{\underline{y = x - 5a}}$$

Der dritte Summand $\frac{4a^2}{x-a}$ ist die Differenz $f_a(x) - (x - 5a)$, die charakterisiert, wie sich der Graph von f_a für $x \to \pm\infty$ an die Asymptote annähert.

b) **Koordinaten und Art der lokalen Extrempunkte**

Zusätzlich zur gegebenen ersten Ableitungsfunktion berechnet man die Gleichung der zweiten Ableitungsfunktion von f_a mithilfe der Quotientenregel und der Kettenregel.

$$f_a''(x) = \frac{(x-a)^2 \cdot (2x-2a) - 2 \cdot (x-a) \cdot (x^2 - 2ax - 3a^2)}{(x-a)^4}$$

$$= \frac{(x-a) \cdot 2(x-a) - 2x^2 + 4ax + 6a^2}{(x-a)^3}$$

$$= \frac{2x^2 - 4ax + 2a^2 - 2x^2 + 4ax + 6a^2}{(x-a)^3}$$

$$= \frac{8a^2}{(x-a)^3}$$

Notwendige Bedingung für die Existenz lokaler Extremstellen:

$$f_a'(x) = 0 \;\Rightarrow\; x^2 - 2ax - 3a^2 = 0 \;\Rightarrow\; x_{1,2} = a \pm \sqrt{a^2 + 3a^2} \;\Rightarrow\; x_1 = 3a;\ x_2 = -a$$

Hinreichende Bedingung für die Existenz lokaler Extremstellen:

$$f_a''(3a) = \frac{8a^2}{(3a-a)^3} = \frac{1}{a} > 0, \text{ da } a > 0 \qquad \text{(lokales Minimum)}$$

$$f_a''(-a) = \frac{8a^2}{(-a-a)^3} = -\frac{1}{a} < 0, \text{ da } a > 0 \qquad \text{(lokales Maximum)}$$

Berechnung der Funktionswerte an den lokalen Extremstellen:

$$f_a(3a) = \frac{(3a-3a)^2}{3a-a} = 0$$

$$f_a(-a) = \frac{(-a-3a)^2}{-a-a} = \frac{16a^2}{-2a} = -8a$$

Der Graph von f_a hat genau einen lokalen Tiefpunkt T_a und genau einen lokalen Hochpunkt H_a. Die Koordinaten dieser Punkte sind $\underline{\underline{T_a(3a\,|\,0)}}$ und $\underline{\underline{H_a(-a\,|\,-8a)}}$.

Begründung für die Nichtexistenz von Wendepunkten

Mögliche Wendestellen sind die Lösungen der Gleichung $f_a''(x) = \frac{8a^2}{(x-a)^3} = 0$.

Da $8a^2 \neq 0$ für $a > 0$ ist, hat die Gleichung $f_a''(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{D}_{f_a}$ keine Lösung und der Graph von f_a keine Wendepunkte.

Geradengleichung (Ortskurve der Hochpunkte)

Zur Bestimmung der Geradengleichung setzt man die nach a aufgelöste x-Koordinate des Hochpunktes in seine y-Koordinate ein.

Für alle Hochpunkte $H_a(-a\,|\,-8a)$ gilt:
Aus $x = -a$ folgt $a = -x$ und mit $y = -8a$ folgt dann $y = -8 \cdot (-x) = 8x$.
Die Gerade, auf der die Hochpunkte des Graphen von f_a liegen, hat die Gleichung $\underline{\underline{y = 8x}}$.

c) Aus der Berechnung des Tiefpunktes $T_a(3a\,|\,0)$ des Graphen von f_a ist bekannt, dass $x = 3a$ eine Nullstelle ist. Entnimmt man der Abbildung für die Graphen G_I, G_{II} und G_{III} in dieser Reihenfolge die Nullstellen $x_I = 2$, $x_{II} = 4$ und $x_{III} = 6$, so erhält man:

$$2 = 3a \;\Rightarrow\; a = \frac{2}{3} \qquad 4 = 3a \;\Rightarrow\; a = \frac{4}{3} \qquad 6 = 3a \;\Rightarrow\; a = 2$$

Deshalb gilt $\underline{\underline{G_I = G_{\frac{2}{3}}}}$, $\underline{\underline{G_{II} = G_{\frac{4}{3}}}}$ und $\underline{\underline{G_{III} = G_2}}$.

d) Für $a = 1$ gilt:

$$f_1(x) = \frac{(x-3)^2}{x-1}$$

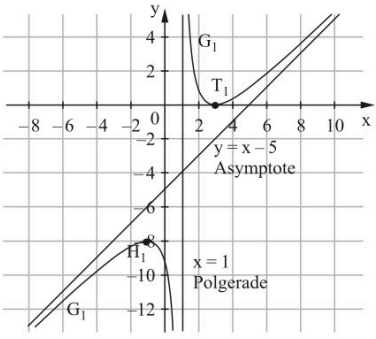
$T_1(3|0)$ und $H_1(-1|-8)$

Asymptote:

$y = x - 5$

Polgerade:

$x = 1$



e) **Nachweis der Richtigkeit der Termumformung**

Um zu zeigen, dass sich der Funktionsterm $f_1(x)$ in die angegebene Summe umformen lässt, verwendet man das Ergebnis der Polynomdivision aus Teilaufgabe a:

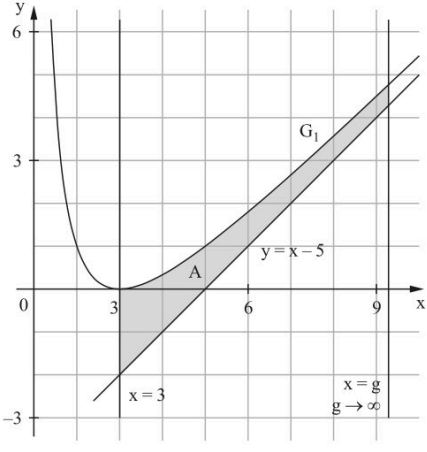
$$(x^2 - 6ax + 9a^2) : (x - a) = x - 5a + \frac{4a^2}{x-a}$$

Für $a = 1$ folgt dann:

$$(x^2 - 6x + 9) : (x - 1) = x - 5 + \frac{4}{x-1} \quad \Rightarrow \quad f_1(x) = x - 5a + \frac{4}{x-1}$$

Überprüfung der Existenz des Grenzwertes

Man berechnet zunächst den Flächeninhalt $A(g)$ (siehe Abbildung) der durch den Funktionsgraphen und die Geraden $x = 3$ und $x = g$; $g > 3$ eingeschlossenen Fläche mithilfe des bestimmten Integrals:



$$A(g) = \int_3^g (f_1(x) - (x-5))\,dx$$

$$= \int_3^g \left(x - 5 + \frac{4}{x-1} - (x-5)\right) dx$$

$$= \int_3^g \frac{4}{x-1}\,dx$$

$$= [4 \cdot \ln|x-1|]_3^g$$

$$= 4 \cdot (\ln|g-1| - \ln 2)$$

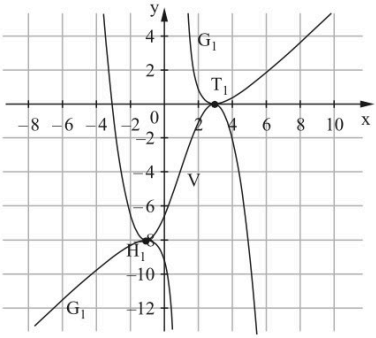
$$= 4 \cdot \ln\left|\frac{g-1}{2}\right|$$

Es ist nun zu untersuchen, ob der Grenzwert $\lim\limits_{g \to \infty} A(g)$ existiert, d. h., ob dem Flächeninhalt der offenen Fläche eine reelle Zahl zugeordnet werden kann.

Da $\lim\limits_{x \to \infty} \ln x = \infty$ gilt, ist auch $\lim\limits_{g \to \infty} \left(4 \cdot \ln \left| \frac{g-1}{2} \right| \right) = \infty$.

Es existiert keine reelle Maßzahl des Flächeninhaltes der beschriebenen Fläche.

f) Das Gleis (V) soll die beiden Teile des Graphen von G_1 in den Punkten $T_1(3|0)$ und $H_1(-1|-8)$ „knickfrei" miteinander verbinden. Da der Anstieg des Graphen G_1 in den Extrempunkten jeweils null ist (waagerechte Tangente), muss das auch für den Graphen V der zu ermittelnden ganzrationalen Funktion gelten. Eine ganzrationale Funktion muss mindestens dritten Grades sein, damit ihr Graph zwei waagerechte Tangenten haben kann. Die allgemeine Gleichung einer ganzrationalen Funktion dritten Grades lautet



$$v(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d; \quad x \in \mathbb{R},$$

wobei a, b, c und d die für den speziellen Fall zu bestimmenden Parameter sind. Für die Berechnung der vier Parameter verwendet man einerseits die Koordinaten der beiden Extrempunkte und andererseits die Tatsache, dass der Anstieg des Graphen G_1 an den Extremstellen null ist. Dazu ist die Gleichung der ersten Ableitungsfunktion von v notwendig:

$$v'(x) = 3 \cdot a \cdot x^2 + 2 \cdot b \cdot x + c$$

Damit erhält man aus den gegebenen Bedingungen die folgenden Gleichungen:

I	$T_1(3\|0)$	$\Rightarrow$	$v(3) = 27a + 9b + 3c + d = 0$
II	$H_1(-1\|-8)$	$\Rightarrow$	$v(-1) = -a + b - c + d = -8$
III	$v'(3) = 0$	$\Rightarrow$	$v'(3) = 27a + 6b + c = 0$
IV	$v'(-1) = 0$	$\Rightarrow$	$v'(-1) = 3a - 2b + c = 0$

Die Differenz der Gleichungen III – IV ergibt $b = -3a$.
Daraus erhält man mit der IV. Gleichung $c = -9a$.
Aus den Resultaten für b und c folgt mit der I. Gleichung $d = 27a$.

Abschließend erhält man mit der II. Gleichung $a = -\frac{1}{4}$, $b = \frac{3}{4}$, $c = \frac{9}{4}$, $d = -\frac{27}{4}$.

Die gesuchte Funktion v hat folgende Gleichung:

$$v(x) = -\frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{4}x^2 + \frac{9}{4}x - \frac{27}{4}$$

Sie ist diejenige ganzrationale Funktion niedrigsten Grades, deren Graph die Bedingungen erfüllt.