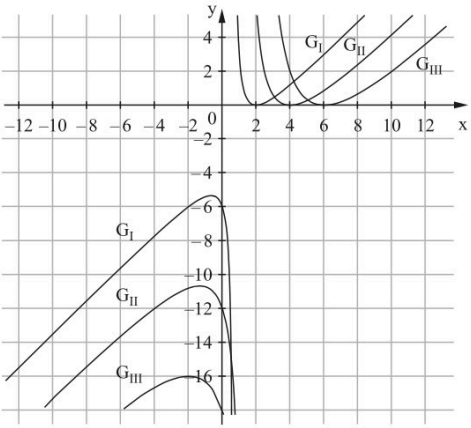
Eisenbahntrasse BE

Im nebenstehenden Bild sind drei Graphen der Funktionenschar f_a mit

$$f_a(x) = \frac{(x-3a)^2}{x-a}, \quad a \in \mathbb{R}, \quad a > 0$$

gegeben.



a) Geben Sie den Definitionsbereich der Funktionen f_a an.
Begründen Sie, dass $x = a$ eine Polstelle ist.
Bestimmen Sie eine Gleichung für die schräge Asymptote. 7

b) Ermitteln Sie die Koordinaten und Art der lokalen Extrempunkte der Graphen von f_a.
Ohne Nachweis dürfen Sie verwenden:

$$f_a'(x) = \frac{x^2 - 2ax - 3a^2}{(x-a)^2}$$

[*Kontrollergebnisse:* $H_a(-a \mid -8a)$, $T_a(3a \mid 0)$]

Begründen Sie, dass keiner der Graphen einen Wendepunkt besitzt.
Bestimmen Sie eine Gleichung der Geraden, auf der die lokalen Hochpunkte der Graphen von f_a liegen. 13

c) Geben Sie an, für welche Werte des Parameters a die Graphen gezeichnet worden sind und begründen Sie Ihre Entscheidung. 3

d) Zeichnen Sie für $a = 1$ alle Asymptoten und den Graphen von f_1 mindestens für das Intervall $[-6; 8]$. 6

e) Zeigen Sie, dass die Funktionsgleichung von f_1 in der Form

$$f_1(x) = x - 5 + \frac{4}{x-1}$$

geschrieben werden kann.
Der Graph von f_1, die Gerade mit der Gleichung $y = x - 5$ sowie die Senkrechte $x = 3$ schließen eine Fläche ein, die ins Unendliche reicht.
Prüfen Sie, ob dieser Fläche ein endlicher Flächeninhalt zugeordnet werden kann. 6