Lösungen zu Aufgabe 2.1

a) **Geradengleichungen**

Parametergleichung g_R der Flugbahn des Raubvogels:

$$g_R\colon \vec{x} = \overrightarrow{OP_0} + t \cdot \overrightarrow{P_0P_1} = \begin{pmatrix} 3\,260 \\ -1\,860 \\ 830 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -12 \\ 12 \\ -1 \end{pmatrix};\ t \in \mathbb{R}$$

Parametergleichung g_S der Flugbahn des Singvogels:

$$g_S\colon \vec{x} = \overrightarrow{OQ_0} + s \cdot \overrightarrow{Q_0Q_1} = \begin{pmatrix} 800 \\ -600 \\ 200 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix};\ s \in \mathbb{R}$$

Nachweis der gegebenen Geschwindigkeiten

Es werden die Streckenlängen $|\overrightarrow{P_0P_1}|$ und $|\overrightarrow{Q_0Q_1}|$, die die Vögel in einer Sekunde zurücklegen, nach dem Satz des Pythagoras berechnet und die damit in Meter pro Sekunde gegebenen Geschwindigkeiten in die Einheit Kilometer pro Stunde umgerechnet.

Geschwindigkeit v_R des Raubvogels:

$$|\overrightarrow{P_0P_1}| = \sqrt{(-12)^2 + 12^2 + (-1)^2} = \sqrt{289} = 17\,[\text{m}]$$

$$v_R = \frac{17\text{ m}}{1\text{ s}} = 17 \cdot \frac{3\,600}{1\,000}\,\frac{\text{km}}{\text{h}} = 61{,}2\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Geschwindigkeit v_S des Singvogels:

$$|\overrightarrow{Q_0Q_1}| = \sqrt{(-4)^2 + 8^2 + 1^2} = \sqrt{81} = 9\,[\text{m}]$$

$$v_S = \frac{9\text{ m}}{1\text{ s}} = 9 \cdot \frac{3\,600}{1\,000}\,\frac{\text{km}}{\text{h}} = 32{,}4\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Nachweis, dass die Flugbahnen g_R und g_S zueinander windschief sind

Bestätigung der linearen Unabhängigkeit der Richtungsvektoren:

1. Möglichkeit:

Zwei Richtungsvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ sind linear unabhängig, wenn die Gleichung $\vec{u} = k \cdot \vec{v}$ für kein $k \in \mathbb{R}$ erfüllt wird.

$$\begin{pmatrix} -12 \\ 12 \\ -1 \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{lll} \text{I} & -12 = -4k & k = 3 \\ \text{II} & 12 = 8k & \Rightarrow\ k = 1{,}5 \\ \text{III} & -1 = k & k = -1 \end{array}$$

Es gibt kein k, das die Gleichung erfüllt.

2. Möglichkeit:

Die Vektoren $|\overrightarrow{P_0P_1}|$ und $|\overrightarrow{Q_0Q_1}|$ sind genau dann linear unabhängig, wenn die Gleichung $\lambda \cdot \overrightarrow{P_0P_1} + \mu \cdot \overrightarrow{Q_0Q_1} = \vec{0}$ nur trivial, das heißt $\lambda = 0$ und $\mu = 0$, lösbar ist.

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} -12 \\ 12 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{ll} \text{I} & -12\lambda - 4\mu = 0 \\ \text{II} & 12\lambda + 8\mu = 0 \\ \text{III} & -\lambda + \mu = 0 \end{array}$$

Aus I + II folgt $\mu = 0$ und damit auch $\lambda = 0$.

Die Richtungsvektoren der Fluggeraden sind linear unabhängig.

Abstandsberechnung:
Zur Berechnung des Abstandes d nicht paralleler Geraden g_R und g_S findet man in Tafelwerken eine Formel, die mit der Symbolik dieser Aufgabe folgendermaßen geschrieben wird:

$$d(g_R, g_S) = \left| (\overrightarrow{OQ_0} - \overrightarrow{OP_0}) \circ \vec{n}_0 \right|$$

Dabei sind $\overrightarrow{OQ_0}$ und $\overrightarrow{OP_0}$ die Stützvektoren der Geraden g_S sowie g_R und $\vec{n}_0$ ist der Normaleneinheitsvektor, d. h. der auf die Länge 1 normierte Vektor, der sowohl zu g_R als auch g_S senkrecht ist.

1. Möglichkeit:
Ein Normalenvektor $\vec{n}$ ergibt sich durch das Vektorprodukt der linear unabhängigen Richtungsvektoren der Geraden g_R und g_S.

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} -12 \\ 12 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \cdot 1 - (-1) \cdot 8 \\ (-1) \cdot (-4) - (-12) \cdot 1 \\ (-12) \cdot 8 - 12 \cdot (-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 16 \\ -48 \end{pmatrix} = 4 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -12 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n}_0 = \frac{1}{\sqrt{5^2 + 4^2 + (-12)^2}} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -12 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{185}} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -12 \end{pmatrix}$$

2. Möglichkeit:
Steht das Vektorprodukt nicht zur Verfügung, kann ein Normalenvektor $\vec{n}$ mithilfe des Skalarproduktes berechnet werden.

Es ist das System aus den Gleichungen $\vec{n} \circ \overrightarrow{P_0P_1} = 0$ und $\vec{n} \circ \overrightarrow{Q_0Q_1} = 0$ zu lösen:

$$\begin{array}{ll} \text{I} & -12n_1 + 12n_2 - n_3 = 0 \\ \text{II} & -4n_1 + 8n_2 + n_3 = 0 \end{array}$$

Man setzt als Parameter $n_3 = \delta$ und erhält aus $\text{I} - 3 \cdot \text{II}$ die Gleichung $n_2 = -\frac{1}{3}\delta$.

Nach dem Einsetzen von $n_2 = -\frac{1}{3}\delta$ in die Gleichung I erhält man $n_1 = -\frac{5}{12}\delta$.

Somit ist $\vec{n} = \delta \cdot \begin{pmatrix} \frac{-5}{12} \\ \frac{-1}{3} \\ 1 \end{pmatrix} = 12\delta \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \\ 12 \end{pmatrix}$.

Dieser Vektor ist linear abhängig zu dem Vektor $\vec{n}$, der mit dem Vektorprodukt berechnet wurde.

Mit der genannten Formel kann nun der Abstand berechnet werden:

$$d(g_R, g_S) = \left| \left(\begin{pmatrix} 800 \\ -600 \\ 200 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3\,260 \\ -1\,860 \\ 830 \end{pmatrix} \right) \circ \left(\frac{1}{\sqrt{185}} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -12 \end{pmatrix} \right) \right| = \frac{1}{\sqrt{185}} \cdot \left| \begin{pmatrix} -2\,460 \\ 1\,260 \\ -630 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -12 \end{pmatrix} \right|$$

$$d(g_R, g_S) = \frac{1}{\sqrt{185}} \cdot \left| -12\,300 + 5\,040 + 7\,560 \right| = \frac{300}{\sqrt{185}} \approx 22$$

Der Abstand der Fluggeraden beträgt rund 22 m.
Linear unabhängige Richtungsvektoren und ein von null verschiedener Abstand bestätigen, dass die Fluggeraden zueinander windschief sind.

b) **Durchschnitt $E \cap g_S$**

Die Ebene E lässt sich in der Punkt-Normalenform und nach Anwendung des Skalarproduktes in der Koordinatenform angeben:

$$E: \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 10 \end{pmatrix} \circ \vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 10 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 280 \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad x - y + 10z = 2\,800$$

Setzt man in die Koordinatenform die Parametergleichung der Flugbahn des Singvogels ein, so kann der Parameterwert s berechnet werden, der dem Schnittpunkt $Q_S = E \cap g_S$ zugehört:

$$\begin{aligned} (800 - 4s) - (-600 + 8s) + 10 \cdot (200 + s) &= 2\,800 \\ 800 - 4s + 600 - 8s + 2\,000 + 10s &= 2\,800 \\ -2s &= -600 \\ s &= 300 \end{aligned}$$

$$\overrightarrow{OQ_{300}} = \begin{pmatrix} 800 \\ -600 \\ 200 \end{pmatrix} + 300 \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -400 \\ 1\,800 \\ 500 \end{pmatrix}$$

Der Singvogel verlässt den Frühnebel im Punkt $S = \underline{\underline{Q_{300}(-400 \mid 1\,800 \mid 500)}}$.

Benötigte Zeit für den Weg $|\overrightarrow{Q_0Q_{300}}|$

Die Strecke $\overrightarrow{Q_0Q_{300}}$ hat die Länge ℓ:

$$\ell = \left| \begin{pmatrix} -400 \\ 1\,800 \\ 500 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 800 \\ -600 \\ 200 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(-1\,200)^2 + 2\,400^2 + 300^2} = 2\,700\,[\text{m}]$$

Da der Singvogel mit einer konstanten Geschwindigkeit von $9\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ fliegt, benötigt er für diesen Weg $\underline{\underline{300 \text{ Sekunden}}}$ oder $\underline{\underline{5 \text{ Minuten}}}$.

Das geht auch aus dem berechneten Parameterwert $s = 300$ hervor.

Winkel α zwischen E und g_S

Berechnet wird das Komplement (Ergänzung zu 90°) des Winkels, der durch den Normalenvektor von E und den Richtungsvektor von g_S eingeschlossen ist:

$$\sin\alpha = \frac{|\vec{n}_E \circ \overrightarrow{Q_0Q_1}|}{|\vec{n}_E| \cdot |\overrightarrow{Q_0Q_1}|} = \frac{\left| \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 10 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{102} \cdot \sqrt{81}} = \frac{2}{9 \cdot \sqrt{102}} \approx 0{,}022 \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx 1{,}3°$$

Der Schnittwinkel hat eine Größe von rund $\underline{\underline{1{,}3°}}$.

c) **Berechnung des Abstandes**

Für die Position des Raubvogels zu dem Zeitpunkt, in dem der Singvogel den Frühnebel verlässt, gilt ebenfalls der Parameterwert $s = t = 300$.

Der Ortsvektor $\overrightarrow{OP_{300}}$ dieser Position ergibt sich aus der Flugbahngleichung des Raubvogels:

$$\overrightarrow{OP_{300}} = \begin{pmatrix} 3\,260 \\ -1\,860 \\ 830 \end{pmatrix} + 300 \cdot \begin{pmatrix} -12 \\ 12 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -340 \\ 1\,740 \\ 530 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad P_{300}(-340 \mid 1\,740 \mid 530)$$

Die Maßzahl des Abstandes d der Vögel ist der Betrag des Vektors $\overrightarrow{Q_{300}P_{300}}$:

$$d = \left| \begin{pmatrix} -340 \\ 1\,740 \\ 530 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -400 \\ 1\,800 \\ 500 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 60 \\ -60 \\ 30 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{60^2 + (-60)^2 + 30^2} = 90$$

Zu dem Zeitpunkt, in dem der Singvogel den Frühnebel verlässt, hat der Raubvogel $\underline{\underline{90\text{ m}}}$ Abstand vom Singvogel.

Winkel β zwischen ursprünglicher und neuer Flugbahn des Raubvogels

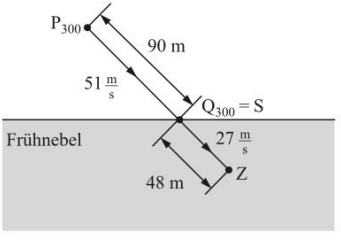
Die Berechnung des Winkels erfolgt mit den Vektoren $\overrightarrow{P_0P_1}$ (ursprüngliche Flugbahn) und $\overrightarrow{Q_{300}P_{300}}$ (neue Flugbahn) nach dem Skalarprodukt:

$$\cos\beta = \frac{\overrightarrow{P_0P_1} \circ \overrightarrow{Q_{300}P_{300}}}{|\overrightarrow{P_0P_1}| \cdot |\overrightarrow{Q_{300}P_{300}}|} = \frac{\begin{pmatrix} -12 \\ 12 \\ -1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 60 \\ -60 \\ 30 \end{pmatrix}}{17 \cdot 90} = \frac{-1\,470}{1\,530} = \frac{-49}{51} \approx -0{,}96078$$

$$\Rightarrow \quad \beta \approx 163{,}9°$$

Der Haken, den der Raubvogel in Richtung des Singvogels schlägt, erfolgt unter einem Winkel von rund $\underline{\underline{164°}}$.

d) Beide Vögel bewegen sich jetzt auf der gleichen Geraden mit der dreifachen Geschwindigkeit.
Der Raubvogel startet im Punkt P_{300} mit folgender Geschwindigkeit:



$$3 \cdot v_R = 3 \cdot \frac{17\text{ m}}{1\text{ s}} = 51\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Der Singvogel startet im Punkt $S = Q_{300}$ mit folgender Geschwindigkeit:

$$3 \cdot v_S = 3 \cdot \frac{9\text{ m}}{1\text{ s}} = 27\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Für die Strecke $\overrightarrow{P_{300}Q_{300}}$, die eine Länge von 90 m hat, benötigt der Raubvogel die Zeit t:

$$t = \frac{|\overrightarrow{P_{300}Q_{300}}|}{3 \cdot v_R} = \frac{90\text{ m}}{51\,\frac{\text{m}}{\text{s}}} = \frac{30}{17}\text{ s}$$

In genau dieser Zeit legt der Singvogel die Strecke $\overrightarrow{Q_{300}Z}$ zurück, die eine Länge von $s = 3 \cdot v_S \cdot t = 27\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \frac{30}{17}\text{ s} \approx 48\text{ m}$ hat.

Da sich die Distanz zwischen Raubvogel und Singvogel im weiteren Verlauf aufgrund der unterschiedlichen Geschwindigkeiten verringert, genügt also eine Sichtweite von etwa $\underline{\underline{48\text{ m}}}$, damit der Raubvogel den Singvogel nicht aus den Augen verliert.