Lösungen zu Aufgabe 2.2

a) Koordinaten

Da E über A liegt, sind die Koordinaten bis auf die z-Koordinate bestimmt: E(0 | 0 | z)

Die Koordinaten von E müssen die Geradengleichung von g: $x = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 16 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 4,5 \\ 3 \end{pmatrix}$ erfüllen. Für die x- und y-Koordinate muss gelten:

$$0 = 6 + 3s$$
 \Rightarrow $s = -2$
 $0 = 9 + 4.5s$ \Rightarrow $s = -2$

Einsetzen von s = -2 liefert:

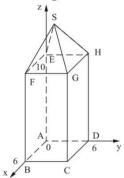
$$z = 16 + 3 \cdot (-2) = 10$$

Der Punkt E hat die Koordinaten (0 | 0 | 10).

S liegt über dem Mittelpunkt M(3 | 3 | 0) des Quadrates ABCD in 16 m Höhe. Somit gilt: S(3 | 3 | 16)

Durch die Lage der Punkte F, G und H über B, C und D ergeben sich die Koordinaten: F(6|0|10); G(6|6|10); H(0|6|10)

Zeichnung



b) Koordinatengleichung der Ebene E*

Die Parameterform der Ebene E* wird über die 3-Punkteform aufgestellt:

E*:
$$x = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 16 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}$$

1. Möglichkeit:

Der Normalenvektor lässt sich durch das Vektorprodukt der Richtungsvektoren berechnen.

$$\begin{pmatrix} 3\\3\\-6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3\\3\\-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\\36\\18 \end{pmatrix} = 18 \cdot \begin{pmatrix} 0\\2\\1 \end{pmatrix}$$

2. Möglichkeit:

Der Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ der Ebene E* steht senkrecht auf den Richtungsvektoren der

Ebene. Das entsprechende Skalarprodukt muss null ergeben. Es ergibt sich ein unterbestimmtes Gleichungssystem.

$$I \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} = 3x + 3y - 6z = 0$$

II
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} = -3x + 3y - 6z = 0$$

Da es ein unterbestimmtes System ist, kann eine der Koordinaten frei gewählt werden.

Es wird z. B. z=1 gewählt:

I
$$3x + 3y = 6$$

II $-3x + 3y = 6$

Durch Addition der beiden Gleichungen folgt:

$$6y = 12 \iff y = 2$$

Damit folgt x = 0.

Ein Normalenvektor ist $\vec{\mathbf{n}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Die Normalenform der Ebene E* lautet:

$$E *: \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} \vec{x} - \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 16 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = 0$$

Ausmultipliziert ergibt sich die Koordinatenform der Ebene E*:

$$E *: 2y + z - 22 = 0$$

Koordinaten von P

Die gegebene Gerade g schneidet die Ebene E^{\ast} im Punkt P. Um seine Koordinaten zu berechnen, werden die Geradenbedingungen in die Koordinatenform der Ebene E^{\ast} eingesetzt.

$$2(9+4,5s)+16+3s-22=0$$

 $18+9s+16+3s=22$
 $12s=-12$
 $s=-1$

Diese Zahl in die Geradengleichung von g eingesetzt ergibt die Koordinaten des Schnittpunktes P der Geraden g mit der Ebene E^* :

Abstand

Um die Koordinaten von Q (Spitze des Balkens) zu bestimmen, wird die Gleichung der Geraden PQ mit dem Stützpunkt P und dem normierten Normalenvektor von E^{*} aufgestellt.

$$|\vec{n}| = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$$

PQ:
$$\vec{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4.5 \\ 13 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \mathbf{k} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

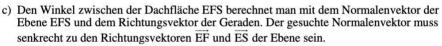
Da der Richtungsvektor die Länge 1 hat, muss $k=2\sqrt{5}\,$ gewählt werden, um den Punkt Q zu erreichen, der $2\sqrt{5}\,$ LE von P entfernt auf dieser Geraden liegt.

$$\overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4,5 \\ 13 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot 2\sqrt{5} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4,5 \\ 13 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 8,5 \\ 15 \end{pmatrix}$$



Alle Punkte der Seitenwand CDHG haben den y-Wert 6. Der Punkt Q hat den y-Wert 8,5. Somit hat das heruntergelassene Seil von der Turmwand folgenden Abstand:

$$8,5 \text{ m} - 6 \text{ m} = 2,5 \text{ m}$$



$$\overrightarrow{EF} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \overrightarrow{ES} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

1. Möglichkeit:

Mit dem Vektorprodukt gilt:

$$\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -36 \\ 18 \end{pmatrix} = -18 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

2. Möglichkeit:

Mit dem Skalarprodukt ergibt sich das folgende unterbestimmte Gleichungssystem:

$$6x = 0 \qquad \Rightarrow x = 0$$

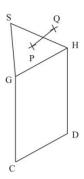
II
$$3x + 3y + 6z = 0 \implies 3y + 6z = 0 \implies y = 2; z = -1$$

Ein Normalenvektor der Ebene EFS lautet daher:

$$\vec{\mathbf{n}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Der Richtungsvektor der Geraden PQ ist:

$$\overline{PQ} = \begin{pmatrix} 3 \\ 8,5 \\ 15 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 4,5 \\ 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \implies \vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$



Um den Winkel zwischen einer Ebene und einer Geraden zu berechnen, wird in die Formel $\sin\alpha = \frac{|\vec{n} \circ \vec{u}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{u}|} \text{ eingesetzt.}$

$$\sin \alpha = \frac{\left| \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \frac{3}{5} \implies \alpha = \underbrace{36,9^{\circ}}$$

d) Wenn die Kante BC in allen Ebenen E_a liegt, müssen die Koordinaten von B und C die allgemeine Gleichung der Ebenenschar erfüllen.

Die Koordinaten von B werden in Ea eingesetzt:

$$a \cdot 6 - 0 = 6a \implies B \in E_a$$

Die Koordinaten von C werden in Ea eingesetzt:

$$a \cdot 6 - 0 = 6a \implies C \in E_a$$

Die Punkte B und C liegen in allen Ebenen Ea.

Somit liegt die Kante BC in allen Ebenen der Ebenenschar.

e) 1. Möglichkeit:

Der Punkt W hat die Koordinaten (3 | 3 | 16,7), da er 0,7 m senkrecht über S liegt. Der Punkt W ist gerade noch zu sehen, wenn der Blick oberhalb der Dachfläche verläuft und die Dachkante \overline{FG} gerade noch schneidet. Der Blick verläuft dann auf der Geraden WM, wobei M der Mittelpunkt der Strecke \overline{FG} ist:

$$M_{\overline{FG}}(6|3|10)$$

Die Gerade WM hat folgende Gleichung:

$$\vec{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 3\\3\\16,7 \end{pmatrix} + \mathbf{k} \begin{pmatrix} 3\\0\\-6,7 \end{pmatrix}$$

Die z-Koordinate des Augenpunktes, der auf der Geraden WM liegen muss, beträgt 1,5. Gesucht ist daher der Punkt auf der Geraden WM, der diese z-Koordinate hat. Dazu muss folgende Gleichung gelöst werden:

$$1,5 = 16,7 - 6,7k$$

$$6,7k = 15,2$$

$$k = \frac{152}{67}$$

Eingesetzt in die Geradengleichung ergeben sich die anderen Koordinaten des "Augenpunktes". Wichtig zur Bestimmung des Abstandes der Person von der Seitenfläche ist die x-Koordinate:

$$x = 3 + \frac{152}{67} \cdot 3 = \frac{657}{67}$$

Alle Punkte der Seitenfläche BCGF haben die x-Koordinate x = 6. Somit gilt für den Abstand von der Wandfläche:

$$\frac{657}{67} - 6 = \frac{255}{67} = 3,81 \text{ m}$$

2. Möglichkeit: Strahlensatz Nach dem 2. Strahlensatz gilt:

$$\frac{x}{3} = \frac{16,7 - 1,5}{6,7}$$
$$x \approx 6,81$$

Der Abstand des Auges (der Person) zur Fläche BCFG beträgt 6,81-3=3,81 m.

