Lösungen zu Aufgabe 3.1

a) Baumdiagramm

Aus dem Text der Aufgabenstellung entnimmt man folgende Wahrscheinlichkeiten:

$$P(B) = 0.04 \implies P(\overline{B}) = 0.96$$

 $P_B(T) = 0.6 \implies P_B(\overline{T}) = 0.4$
 $P_{\overline{B}}(\overline{T}) = 0.9 \implies P_{\overline{B}}(T) = 0.1$

Überprüfung auf stochastische Unabhängigkeit

Zu ermitteln ist die totale Wahrscheinlichkeit P(T), womit die stochastische Unabhängigkeit von B und T zu überprüfen ist. Man benutzt dazu das Baumdiagramm oder die entsprechenden Formeln aus dem Tafelwerk.

O
$$0,04$$

$$\overline{T}$$

$$0,96$$

$$\overline{B}$$

$$0,9$$

$$\overline{T}$$

$$P(T) = P(B) \cdot P_B(T) + P(\overline{B}) \cdot P_{\overline{B}}(T)$$

= 0.04 \cdot 0.6 + 0.96 \cdot 0.1 = 0.12

Möglichkeit 1:

Ein Kriterium für die stochastische Unabhängigkeit von B und T ist $P(T) = P_B(T)$. Wegen P(T) = 0,12 und $P_B(T) = 0,6$ sind B und T stochastisch abhängig.

2. Möglichkeit:

Die Ereignisse B und T sind stochastisch unabhängig, wenn $P(B \cap T) = P(B) \cdot P(T)$ gilt.

$$P(B \cap T) = 0.04 \cdot 0.6 = 0.024$$

 $P(B) \cdot P(T) = 0.04 \cdot 0.12 = 0.0048$

Damit ist $P(B \cap T) \neq P(B) \cdot P(T)$. Die Ereignisse B und T sind stochastisch abhängig.

b) Gesucht ist $P_T(\overline{B})$.

Nach der 1. Pfadregel gilt $P(\overline{B}) \cdot P_{\overline{B}}(T) = P(T \cap \overline{B}) = P(T) \cdot P_{\overline{B}}(\overline{B})$, woraus die Formel von BAYES folgt:

$$P_{T}(\overline{B}) = \frac{P(\overline{B}) \cdot P_{\overline{B}}(T)}{P(T)}$$

Damit ist:

$$P_{T}(\overline{B}) = \frac{0.96 \cdot 0.1}{0.12} = \frac{0.8}{100}$$

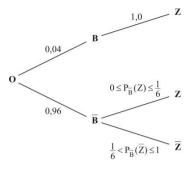
c) Bekannt sind $P_{\overline{B}}(Z) \leq \frac{1}{6}$ und $P_{B}(Z) = 1$. Gesucht ist der Maximalwert der totalen Wahrscheinlichkeit P(Z). Nach der Formel für die totale Wahrscheinlichkeit bzw. dem adäquaten Baumdiagramm folgt:

$$P(Z) = P(B) \cdot P_{B}(Z) + P(\overline{B}) \cdot P_{\overline{B}}(Z)$$

Da der maximale Wert gesucht ist, muss folgende Ungleichung erfüllt sein:

$$P(Z) \le 0.04 \cdot 1 + 0.96 \cdot \frac{1}{6} = 0.2$$

Maximal 20 % der Zuschauer wechseln den Sender.



d) Betrachtet wird eine Bernoulli-Kette der Länge n=6 (Torschussversuche). Die Zufallsgröße X:="Anzahl der Treffer" ist B_{6; p}-binomialverteilt, wobei p so zu bestimmen ist, dass das Ereignis {X≥1} zu mindestens 95 % eintritt:

$$P(X \ge 1) \ge 0.95$$

1

Der Übergang zur Gegenwahrscheinlichkeit ist zwingend, da ansonsten keine auswertbare Ungleichung zur Ermittlung von p entsteht.

$$P(X \ge 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - (1 - p)^{6} \ge 0.95$$

$$\Leftrightarrow (1-p)^6 \le 0.05$$

$$\Leftrightarrow p \ge 1 - 0.05^{\frac{1}{6}}$$

$$\Leftrightarrow$$
 p \geq 0,393

Die Trefferwahrscheinlichkeit muss mindestens bei 39,3 % liegen, damit bei sechs Versuchen wenigstens ein Tor erzielt wird.

e) Entwicklung der Ungleichung

Untersucht wird eine Stichprobe (Bernoulli-Kette) der unbekannten Länge n. Die Zufallsgröße Y:= "Anzahl der einwandfreien Lampen" ist $B_{n;\;0.98}$ -binomialverteilt und soll mindestens zu 99 % Werte annehmen, die größer oder gleich 400 sind. Der Sachverhalt wird durch die Ungleichung $P(Y \ge 400) \ge 0.99$ beschrieben, woraus n zu ermitteln ist. Da das Intervall nach oben offen ist, muss zwingend zur Gegenwahrscheinlichkeit übergegangen werden:

$$P(Y \ge 400) = 1 - P(Y < 400) = 1 - P(Y \le 399) \ge 0.99$$

Auflösen der Ungleichung nach n

Nach der Aufgabenstellung ist die lokale Näherungsformel von MOIVRE-LAPLACE

$$P(Y \leq k) \approx \Phi\bigg(\frac{k+0.5-\mu}{\sigma}\bigg), \ \mu = n \cdot p, \ \sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$$

zur Ermittlung der kumulativen Wahrscheinlichkeit P(Y \leq 399) zu verwenden. Allerdings ist die Faustregel $n \cdot p \cdot (1-p) > 9$ wegen $n \cdot p \cdot (1-p) \geq 400 \cdot 0.98 \cdot 0.02 \approx 7.8$ nicht zwingend erfüllt.

$$P(Y \ge 400) = 1 - P(Y \le 399) \ge 0,99$$

$$P(Y \ge 400) \approx 1 - \Phi\left(\frac{399,5 - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)}}\right) \ge 0,99$$

Sei $z = \frac{399,5-n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}}$. In der Tabelle zur Standardnormalverteilung der Anlage findet man

nur Werte $\Phi(z) \ge 0,5$. Wegen $1 - \Phi(z) = \Phi(-z)$ folgt $P(Y \ge 400) \approx \Phi(-z) \ge 0,99$. Benutzt man die Tabelle der Standardnormalverteilung und berücksichtigt, dass Φ streng monoton wachsend ist, gilt folgende Aussage:

Falls $-z \ge 2,33 \Leftrightarrow z \le -2,33$ gewählt wird, ist die Bedingung P(Y ≥ 400) $\ge 0,99$ erfüllt. Die Anzahl n muss demnach mindestens so gewählt werden, dass folgende Bedingung erfüllt wird:

$$\frac{399, 5 - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)}} \le -2,33$$

Die Ungleichung kann wie folgt nach n aufgelöst werden: Man multipliziert mit der Wurzel und substituiert $m=\sqrt{n}$. Damit entsteht eine quadratische Gleichung in m. Diese kann gelöst und durch Rücksubstitution n ermittelt werden.

$$399,5-n \cdot p \le -2,33\sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$$

$$\iff m = \sqrt{n} \land p \cdot m^2 - 2,33\sqrt{p \cdot (1-p)} \cdot m - 399,5 \ge 0$$

$$0,98 \cdot m^2 - 2,33\sqrt{0,98 \cdot 0,02} \cdot m - 399,5 \ge 0$$

$$0,98 \cdot m^2 - 0,3262 \cdot m - 399,5 \ge 0$$

Dies stellt eine nach oben geöffnete Parabel dar. Die Ungleichung ist für alle $m \ge m_2$ erfüllt, wobei $m_2 > 0$ die rechte Nullstelle ist. Man findet $m_2 \approx 20,4$ und $n_2 \approx 416,2$. Es müssen also mindestens 417 Lampen bestellt werden.