Tipps zu Teilaufgabe e

- Betrachtet wird eine Bernoulli-Kette der Länge $n = 1\,500$ mit der Trefferwahrscheinlichkeit (Blutspender) von $p = 0{,}03$. Die Zufallsgröße „Anzahl der Blutspender" soll Werte annehmen, die mindestens zu 90 % im Intervall $[\mu - a;\ \mu + a]$ liegen.
- Formalisieren Sie diesen Sachverhalt durch eine geeignete Ungleichung.
- Benutzen Sie zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit die globale Näherungsformel von MOIVRE-LAPLACE:

$$P(a \le X \le b) = \Phi\left(\frac{b + 0{,}5 - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a - 0{,}5 - \mu}{\sigma}\right)$$

- Ermitteln Sie aus der Ungleichung das minimale a.
- Benutzen Sie die Tafel für die Standardnormalverteilung in Anlage 2.

Lösungen zu Aufgabe 3.2

a) Die Untersuchung einer Stichprobe auf die Tatsache, ob ein bestimmtes Ereignis eintritt oder nicht, führt immer auf eine Bernoulli-Kette und das Modell Binomialverteilung.

Ereignis D
Es handelt sich um eine Bernoulli-Kette der Länge $n = 19$ mit der Trefferwahrscheinlichkeit (siehe Tabelle B Rh+) $p = 0{,}09$.
Sei X: = „Anzahl der Stichprobenpersonen, die die Blutgruppe B Rh+ besitzen". X genügt der Binomialverteilung $B_{19;\,0{,}09}$.

$$\begin{aligned} P(D) &= P(X > 1) = 1 - P(X \le 1) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1)] \\ &= 1 - [(1-p)^n + n \cdot p \cdot (1-p)^{n-1}] \\ &= 1 - [0{,}91^{19} + 19 \cdot 0{,}09 \cdot 0{,}91^{18}] \approx \underline{\underline{0{,}520}} \end{aligned}$$

Ereignis E
Es handelt sich um eine Bernoulli-Kette der Länge $n = 100$ mit der Trefferwahrscheinlichkeit (siehe Tabelle AB) $p = 0{,}05$.
Die Zufallsgröße Y: = „Anzahl der Stichprobenpersonen mit der Blutgruppe AB" ist $B_{100;\,0{,}05}$-binomialverteilt.

$$\begin{aligned} P(E) &= P(6 \le Y \le 11) = P(Y \le 11) - P(Y \le 5) \\ &= \sum_{k=0}^{11} \binom{n}{k} p^k \cdot (1-p)^{n-k} - \sum_{k=0}^{5} \binom{n}{k} p^k \cdot (1-p)^{n-k} \end{aligned}$$

Die entsprechenden Werte können aus der Tabelle für die summierten Binomialverteilungen Anlage 1 entnommen werden.

$$P(E) \approx 0{,}9957 - 0{,}6160 \approx \underline{\underline{0{,}3797}}$$

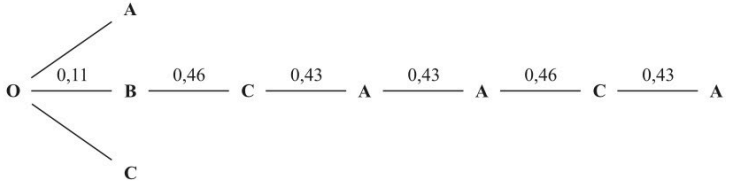
b) Von Interesse sind drei Ereignisse, deren Wahrscheinlichkeit man aus der Verteilungstabelle entnehmen kann:

A: „Ausgewählte Person besitzt Blutgruppe A" $\Rightarrow$ $P(A) = 0{,}43$
B: „Ausgewählte Person besitzt Blutgruppe B" $\Rightarrow$ $P(B) = 0{,}11$
C: „Ausgewählte Person besitzt Blutgruppe AB oder 0"
$\Rightarrow$ $P(C) = 0{,}05 + 0{,}41 = 0{,}46$

Ereignis F

F kann als ein Ereignis eines sechsstufigen Zufallsexperimentes interpretiert werden. In jeder Stufe wird der Übergang zu den Ereignissen A, B und C vollzogen. Dabei sind die Stufen voneinander unabhängig und die Wahrscheinlichkeiten können der Tabelle entnommen werden. Das zugehörige Baumdiagramm hat $3^6 = 729$ Pfade.

Dem Ereignis F entspricht folgender Pfad:



Nach der 1. Pfadregel (Produkt entlang des Pfades) ist folglich:

$$P(F) = P(B) \cdot P(A)^3 \cdot P(C)^2 = 0{,}11 \cdot 0{,}43^3 \cdot 0{,}46^2 \approx \underline{\underline{0{,}0018}}$$

Ereignis G

Im Gegensatz zum Ereignis F spielt die Platzierung keine Rolle, sondern es führen alle Pfade des Baumes zu F, in denen genau einmal B, dreimal A und zweimal C auftreten.

Jeder dieser Pfade hat dieselbe Wahrscheinlichkeit P(F). Folglich ist $P(G) = m \cdot P(F)$, wobei m die Anzahl aller möglichen Pfade ist, d. h. die Anzahl aller möglichen Umverteilungen der Folge BCAACA ohne Berücksichtigung der Reihenfolge. B kann auf jeden der sechs Plätze gesetzt werden. Für jede Belegung von B können drei der restlichen fünf Plätze auf $\binom{5}{3} = 10$ verschiedene Weisen mit A belegt werden. Für die zwei Restplätze bleibt nur noch die Belegung mit C.

Folglich ist:

$$m = 6 \cdot 10 \cdot 1 = 60$$

Damit gilt:

$$P(G) = m \cdot P(F) = 60 \cdot 0{,}0018 \approx \underline{\underline{0{,}11}}$$

c) Betrachtet wird eine Bernoulli-Kette der Länge $n = 10$. Die Zufallsgröße Z: „Anzahl der Personen in der Stichprobe mit negativem Rhesusfaktor“ ist $B_{10;\,p}$-binomialverteilt, wobei p so zu bestimmen ist, dass das Ereignis $\{Z \geq 1\}$ zu mindestens 80 % eintritt:

$$P(Z \geq 1) \geq 0{,}8$$

Der Übergang zur Gegenwahrscheinlichkeit ist zwingend, da ansonsten keine auswertbare Ungleichung zur Ermittlung von p entsteht.

$$P(Z \geq 1) = 1 - P(Z < 1) = 1 - P(Z = 0) = 1 - (1-p)^{10} \geq 0{,}8$$

$$\Leftrightarrow \quad (1-p)^{10} \leq 0{,}2$$

$$\Leftrightarrow \quad p \geq 1 - 0{,}2^{\frac{1}{10}}$$

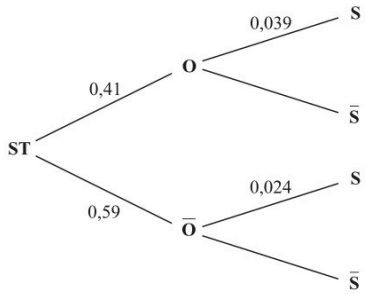
$$\Leftrightarrow \quad p \geq 0{,}1487$$

Falls mindestens $\underline{\underline{14{,}9\ \%}}$ der Grundgesamtheit einen negativen Rhesusfaktor haben, ist zu mindestens 80 % wenigstens eine solche Person in einer Stichprobe vom Umfang $n = 10$ anzutreffen.

d) Untersucht werden die folgenden Ereignisse:

O: „Ein Bundesbürger hat die Blutgruppe 0“

S: „Ein Bundesbürger ist Blutspender“



Aus der Verteilungstabelle für die Blutgruppen und dem Text der Aufgabenstellung entnimmt man die Wahrscheinlichkeiten:

$$P(O) = 0{,}41 \;\Rightarrow\; P(\overline{O}) = 0{,}59$$

$$P_O(S) = 0{,}039$$

$$P_{\overline{O}}(S) = 0{,}024$$

Wahrscheinlichkeit für Blutspender

Es ist die totale Wahrscheinlichkeit P(S) zu berechnen:

$$P(S) = P(O)\cdot P_O(S) + P(\overline{O})\cdot P_{\overline{O}}(S) = 0{,}41\cdot 0{,}039 + 0{,}59\cdot 0{,}024 \approx \underline{\underline{0{,}030}}$$

Wahrscheinlichkeit, dass Blutspender die Blutgruppe 0 besitzt

Es handelt sich um die bedingte Wahrscheinlichkeit $P_S(O)$. Mit dem Satz von BAYES gilt:

$$P_S(O) = \frac{P(O\cap S)}{P(S)} = \frac{P(O)\cdot P_O(S)}{P(S)} = \frac{0{,}41\cdot 0{,}039}{0{,}030} \approx \underline{\underline{0{,}533}}$$

e) Untersucht wird eine Stichprobe (Bernoulli-Kette) der Länge $n = 1\,500$ mit der Trefferwahrscheinlichkeit (Blutspender) von $p = 0{,}03$. Die Zufallsgröße T: „Anzahl der Blutspender“ soll Werte annehmen, die mindestens zu 90 % im Intervall $[\mu - a;\ \mu + a]$ liegen. Dabei ist $\mu = n\cdot p = 1\,500\cdot 0{,}03 = 45$ der Erwartungswert der Binomialverteilung.

Der Sachverhalt wird durch folgende Ungleichung beschrieben, aus der a zu ermitteln ist:

$$P(\mu - a \le T \le \mu + a) \ge 0{,}9$$

Für die Streuung σ^2 gilt:

$$\sigma^2 = n\cdot p\cdot(1-p) = 1\,500\cdot 0{,}03\cdot 0{,}97 = 43{,}65 > 9$$

Damit ist die Anwendung der globalen Näherungsformel von MOIVRE-LAPLACE begründet.

$$P(\mu - a \le T \le \mu + a) \approx \Phi\left(\frac{\mu + a + 0{,}5 - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\mu - a - 0{,}5 - \mu}{\sigma}\right) \ge 0{,}9$$

$$\Phi\left(\frac{a+0{,}5}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{-(a+0{,}5)}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{a+0{,}5}{\sigma}\right) - \left[1 - \Phi\left(\frac{a+0{,}5}{\sigma}\right)\right] \ge 0{,}9$$

$$\Leftrightarrow\quad 2\cdot\Phi\left(\frac{a+0{,}5}{\sigma}\right) \ge 1{,}9$$

$$\Leftrightarrow\quad \Phi\left(\frac{a+0{,}5}{\sigma}\right) \ge 0{,}95$$

Aus der Tafel für die Standardnormalverteilung in Anlage 2 entnimmt man $\Phi(1{,}65) \approx 0{,}95$. Unter Beachtung, dass Φ streng monoton wachsend ist, gilt:

$$\frac{a+0{,}5}{\sigma} \ge 1{,}65$$

$$a \ge 1{,}65\cdot\sigma - 0{,}5 = 1{,}65\cdot\sqrt{43{,}65} - 0{,}5 \approx 10{,}4$$

Wegen der Ganzzahligkeit von a ist $a_{min} = 11$. Das minimale Intervall, welches die genannten Bedingungen erfüllt ist $\underline{\underline{[34;\ 56]}}$.